

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNf - 62/10

G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambrini, G.P. Murtas:
ESPERIMENTI DI PRODUZIONE DI COPPIE E BREMSSTRAHLUNG AD
ALTA ENERGIA IN UN MONOCRISTALLO.

Nota interna: 116
7 Febbraio 1962

ERRATA-CORRIGE

Errata

Corrige

pag. 15, al caso b)

$$[\bar{1}10] = \vec{b}_2$$

$$[001] = \vec{b}_2$$

pag. 16, 4° capoverso

$$[\bar{1}10]$$

$$[001]$$

pag. 35, all'inizio

dà luogo ad una distanza
fra due punti consecuti-
vi del reticolo pari a
 $2\pi\sqrt{a}$

corrisponde alla distan-
za $2\sqrt{a}(2\pi/a)$ cioè
proprio alla distanza
fra due punti consecuti
vi del reticolo inverso
lungo l'asse $[\bar{1}21]$

Pag. 35, prima del secondo capoverso inserire quanto detto alla didascalia della fig. 12bis (pag. IV didascalie).

pag. IV didascalie, fig. 12bis

$$|\theta| = 115 \text{ mrad}$$

$$|\theta| = 11.5 \text{ mrad}$$

ESPERIMENTI DI PRODUZIONE DI COPPIE E BREMSSTRAHLUNG AD ALTA ENERGIA IN UN MONOCRISTALLO.

G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambrini, G.P. Murtas

I - Introduzione.

Da molto tempo diversi autori¹⁻³ hanno messo in evidenza, da un punto di vista teorico, che le sezioni d'urto di produzione di coppie e bremsstrahlung relative alla interazione di primari di alta energia con gli atomi ordinati di un cristallo, vengono alterate anche notevolmente rispetto al valore calcolato per un solo atomo.

Più recentemente "Überall"^{4,5} ha calcolato queste sezioni d'urto usando l'approssimazione di Born, ed esprimendole in funzione dell'angolo θ formato dall'asse cristallino e dalla direzione dei primari. Una caratteristica della sezione d'urto per bremsstrahlung è che essa ha un minimo molto netto per $\theta = 0$, ed un massimo, anch'esso molto pronunciato per un determinato valore di θ .

Un primo esperimento eseguito da Frisch e Olson⁶ riuscì a mettere in evidenza il massimo nella bremsstrahlung ma non il minimo, mentre un secondo esperimento, di Panofsky e Saxena⁷ non mostrò alcun effetto ed un terzo, di Saxena⁸ mostrò ancora il solo massimo.

Gli esperimenti da noi eseguiti con una migliore risoluzione in energia ed in angolo mostrarono un effetto in accordo qualitativo con i calcoli di "Überall" sia per la produzione di coppie⁹ che per la bremsstrahlung¹⁰; in questo ultimo caso è stata messa in evidenza al di fuori di ogni dubbio l'esistenza del minimo per $\theta = 0$. Migliorando ancora la risoluzione angolare è stato possibile rivelare una struttura fine della bremsstrahlung, non prevista da "Überall", a causa di una approssimazione non valida usata nei suoi calco

li. Altre approssimazioni usate da ["]Überall furono prese in considerazione, per determinare la validità, anche da Schiff^{II} e da Auvil e Schiff^{I2}.

In questo lavoro presentiamo un quadro generale delle misure, già in parte pubblicate^{9,10}, effettuate all'elettrosincrotrone di Frascati, esponendo un monocristallo di silicio a temperatura ambiente al fascio γ esterno, per studiare le caratteristiche interferenziali nella produzione di coppie, ed al fascio di elettroni interni al sincrotrone, per studiare le caratteristiche interferenziali nella bremsstrahlung. Il paragrafo II è dedicato ad una rassegna dei calcoli di ["]Überall e di come questi siano stati da noi modificati per interpretare correttamente i nostri risultati sperimentali; nel paragrafo III viene descritto il dispositivo sperimentale impiegato nelle misure; nel paragrafo IV vengono esposti i risultati sperimentali, e confrontati con le previsioni, teoriche; infine nel paragrafo V si discute su alcune prospettive aperte dall'uso dei monocristalli nella sperimentazione alle altissime energie.

II - Calcolo delle sezioni d'urto.

A. L'approssimazione di ["]Überall.

Nel seguito a meno che non venga detto il contrario, esprimeremo, tutte le lunghezze in unità della lunghezza d'onda Compton dell'elettrone $\lambda_c = \hbar/mc = 0.0243/2\pi \text{Å}$, le energie in unità dell'energia di riposo dell'elettrone $mc^2 = 0.51 \text{ MeV}$, e gli impulsi in unità di $mc = 0.51 \text{ MeV}/c$.

Seguendo le idee di ["]Überall⁴, ed usando all'incirca i suoi stessi simboli, possiamo dire che in approssimazione di Born la sezione d'urto per produzione di coppie o bremsstrahlung in un cristallo perfettamente rigido si ottiene moltiplicando la sezione d'urto di Bethe e Heitler^{13,14} relativa ad un solo atomo per il fattore interferenziale del cri-

stallo

$$\frac{(2\pi)^3 N}{\Delta} \sum_{\vec{g}} \delta(\vec{q} - \vec{g}) \quad (I)$$

dove nella sommatoria estesa a tutti i vettori \vec{g} del reticolo inverso relativo al cristallo in questione compare la funzione δ di Dirac dell'argomento $\vec{q} - \vec{g}$, essendo \vec{q} l'impulso trasferito al nucleo; Δ rappresenta il volume della cella unitaria del reticolo del cristallo bersaglio, ed N il numero di atomi del cristallo. Se ora si rappresentano gli impulsi trasferiti nello spazio del reticolo inverso, si vede facilmente che gli estremi dei vettori \vec{q} si distribuiscono in una regione a forma di disco, di raggio unitario, di spessore δ , e avente dall'origine distanza δ , essendo δ il minimo impulso trasferito al nucleo.

Supponiamo per semplicità che il reticolo diretto sia cubico, con passo reticolare a . Allora nello spazio del reticolo inverso i vettori \vec{g} hanno la stessa direzione di quelli del reticolo diretto e il loro modulo è preso uguale all'inverso di quello nel reticolo diretto moltiplicato per 2π . In fig. I i punti rappresentano gli estremi dei vettori \vec{g} , aventi componenti sugli assi ortogonali fondamentali $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ rispettivamente uguale a $(2\pi/a)h_1, (2\pi/a)h_2, (2\pi/a)h_3$ (h_1, h_2, h_3 interi positivi nulli o negativi); \vec{p}_0 (o \vec{k}) rappresenta l'impulso dell'elettrone (o fotone) primario, θ l'angolo fra questo e l'asse cristallino \vec{b}_1 e la regione tratteggiata rappresenta il disco luogo degli estremi degli impulsi trasferiti al nucleo. Al variare di θ varia il numero di punti del reticolo inverso che cadono entro il disco, quindi varia anche il numero di termini diversi da zero della (I) e di conseguenza anche il valore della sezione d'urto.

Un'approssimazione essenziale usata da Überall, valida per angoli $\theta \rightarrow 0$, è di considerare i vari piani reticolari $h_1 = \dots - I, 0, I \dots$ segnati in fig. I, come aventi

una distribuzione continua di punti del reticolo, approssimazione tanto più valida quanto maggiore è il numero di punti del reticolo che cadono nel disco; in tal modo la (I), per il reticolo cubico, si semplifica in:

$$\frac{2\pi}{a} N \sum_{h_i} \delta(q_i - \frac{2\pi}{a} h_i) \quad (2)$$

essendo q_i la proiezione di q su h_i . Per esempio, se si considera il solo piano $h_i = 0$, il fattore interferenziale è diverso da zero solo quando q giace in tale piano. La situazione è in realtà più complicata per la necessità di tenere conto delle vibrazioni reticolari dipendenti dalla temperatura, per cui il fattore (2) deve essere sostituito da:

$$\frac{2\pi}{a} N \exp(-Aq^2) \sum_{h_i} \delta(q_i - \frac{2\pi}{a} h_i) - N[1 - \exp(-Aq^2)] \quad (3)$$

(FIG. 1 - vedi dopo il testo)

dove A rappresenta il quadrato dello spostamento medio degli atomi della loro posizione di equilibrio; si ha:

$$A = \frac{3m^2c^2}{4MK\Theta} \left[1 + 4 \frac{T}{\Theta} \Gamma\left(\frac{\Theta}{T}\right) \right] \quad (4)$$

nella quale M è la massa atomica, K è la costante di Boltzmann, T è la temperatura assoluta del cristallo, Θ è la temperatura di Debye del cristallo alla temperatura T, $\Gamma\left(\frac{\Theta}{T}\right)$ è la funzione di Debye¹⁵:

$$\Gamma\left(\frac{\Theta}{T}\right) = \frac{T}{\Theta} \int_0^{\frac{\Theta}{T}} \frac{t}{e^t - 1} dt$$

L'effetto interferenziale viene così ridotto rispetto ad un reticolo perfettamente rigido. Le sezioni d'urto per l'intero monocristallo, differenziali in energia, si possono esprimere, rispettivamente per la produzione di coppie e la bremsstrahlung, nel campo dei nuclei, nella seguente forma^{4,5}

$$\begin{cases} \sigma_p(\theta, E_+, R) dE_+ = N \bar{\sigma} \Phi_n(\theta, y, k) dy \\ \sigma_b(\theta, R, E_0) dR = N \bar{\sigma} I_n(\theta, x, E_0) \frac{dx}{x} \\ \bar{\sigma} = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} = 5.79 \times 10^{-26} Z^2 \text{cm}^2 \end{cases} \quad (5)$$

N = numero di atomi del cristallo

Z = numero atomico

$$\begin{aligned} \Phi_n(\theta, y, k) = & [y^2 + (1-y)^2] \left[\psi_1^c(\delta) + \psi_1^0(\theta, \delta) + \sum_{h \geq 1} \psi_1^h(\theta, \delta) \right] + \\ & + \frac{2}{3} y(1-y) \left[\psi_2^c(\delta) + \psi_2^0(\theta, \delta) + \sum_{h \geq 1} \psi_2^h(\theta, \delta) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I_n(\theta, x, E_0) = & [1 + (1-x)^2] \left[\psi_1^c(\delta) + \psi_1^0(\theta, \delta) + \sum_{h \geq 1} \psi_1^h(\theta, \delta) \right] - \\ & - \frac{2}{3} (1-x) \left[\psi_2^c(\delta) + \psi_2^0(\theta, \delta) + \sum_{h \geq 0} \psi_2^h(\theta, \delta) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

in cui:

θ = Angolo della particella primaria (fotone elettrone) con l'asse cristallografico.

k = Energia del fotone primario o irraggiato

E_+ = Energia del positrone prodotto in una coppia.

E_0 = Energia dell'elettrone primario.

$y = \frac{E+}{k}$ Energia frazionaria del positrone di una coppia rispetto al fotone primario

$x = k/E_0$ Energia frazionaria del fotone irraggiato rispetto all'elettrone primario

$\delta = \frac{1}{2k} \frac{1}{y(1-y)}$ Minimo impulso trasferito al nucleo nella produzione di coppie.

$\delta = \frac{1}{2E_0} \frac{x}{1-x}$ Minimo impulso trasferito al nucleo nella bremsstrahlung.

Le funzioni $\psi_{1,2}^c(\delta)$ rappresentano la parte continua del fenomeno; esse infatti non dipendono da θ perchè provengono dal secondo termine della (3).

In generale si ha:

$$\begin{cases} \psi_1^c(\delta) = 4 + 4 \int_0^1 [1 - \exp(-Aq^2)] \frac{(q-\delta)^2}{q^3} [1 - F(q)]^2 dq \\ \psi_2^c(\delta) = \frac{10}{3} + 4 \int_0^1 [1 - \exp(-Aq^2)] [q^3 - 6\delta^2 q \log \frac{q}{\delta} + 3\delta^2 q - 4\delta^3] [1 - F(q)]^2 \frac{dq}{q^4} \end{cases} \quad (8)$$

essendo

$$F(q) = \frac{1}{1 + (\beta q)^2} \quad (9)$$

il fattore di forma atomico, nel quale:

$$\beta = 111 Z^{-\frac{1}{3}} \quad (10)$$

rappresenta approssimativamente il raggio di schermo; il fattore $III = 137/e^{\frac{1}{2}}$ è un valore aggiustato in modo da ottenere, secondo Schiff¹⁶, una schermatura di tipo esponenziale anzichè del tipo di Thomas-Fermi.

In condizioni di schermatura completa, cioè per $\beta\delta \ll 1$ le (8) non dipendono più da δ e si semplificano come segue:

$$\begin{cases} \psi_1^c = 2 [2 \ln \beta + (1+\beta) e^{\beta} E_i(-\beta) + 2] \\ \psi_2^c = 2 [2 \ln \beta + (1+\beta) e^{\beta} E_i(-\beta) + \frac{5}{3}] \end{cases} \quad (II)$$

essendo $D = A/\beta^2$ e $E_i(-D)$ la funzione esponenziale integrale¹⁷ data da

$$E_i(-D) = -\int_D^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Le funzioni $\psi_{1,2}^0(\theta, \delta)$ danno il principale contributo interferenziale e precisamente quello dovuto al piano reticolare $h_1 = 0$ di fig. I; si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_1^0(\theta, \delta) &= \frac{e^D}{\mu(b+1)^{1/2}} \left(1 + 2D + \frac{2D}{b}\right) [1 - \Psi(z)] - 2 \left(\frac{D}{\pi b}\right)^{1/2} e^{-\frac{D}{b}} \\ \psi_2^0(\theta, \delta) &= 3\psi_3^0(z) + \frac{12}{\pi\mu} \int_1^z \frac{\exp(-D \frac{u^2}{b})}{(b+u^2)^2} \ln \left[u + (u^2-1)^{1/2} \right] du \\ \psi_3^0(\theta, \delta) &= \frac{8}{3\mu b^2} [1 - \Psi(z)] + \frac{1}{3} \frac{e^D}{(b+1)^{1/2}} \left[1 + 2D - \frac{4-10D}{b} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{8(1-D)}{b^2} \right] [1 - \Psi(z)] - \frac{2}{3} \left(\frac{D}{\pi b}\right)^{1/2} \frac{b+4}{b} e^{-\frac{D}{b}} \end{aligned} \right. \quad (I2)$$

essendo:

$$\mu = \frac{\delta a}{2\pi}, \quad b = \left(\frac{\theta}{\beta\delta}\right)^2, \quad z = \left[\frac{D}{b}(b+1)\right]^{1/2},$$

e $\Psi(z)$ la funzione degli errori,¹⁸ data da

$$\Psi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

L'integrale che compare nella seconda delle (I2) non è calcolabile analiticamente in termini di funzioni elementari. L'influenza dei piani reticolari successivi allo zero è rappresentata nelle (6), (7) dalle funzioni $\psi_{1,2}^h(\theta, \delta)$, per $h \geq 1$. (L'indice di sommatoria h_1 è stato sostituito per semplicità di scrittura con l'indice h).

L'espressione generale di queste funzioni è piuttosto complicata, mentre l'espressione per $\theta = 0$ è data da:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{h \geq 1} \psi_1^h(0, \delta) &= -2\mu \left[1 + (1+D) e^D E_i(-D) \right] \sum_{h \geq \mu} \frac{1}{h^2} \exp \left[-A \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \frac{h^2}{2} \right] \\ \sum_{h \geq 1} \psi_2^h(0, \delta) &= -8\mu^2 \left[1 + (1+D) e^D E_i(-D) \right] \sum_{h \geq \mu} \frac{h-\mu}{h^4} \exp \left[-A \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \frac{h^2}{2} \right] \end{aligned} \right. \quad (I3)$$

Da notare che il caso di atomi non ordinati nello spazio si tratta immaginando di far tendere la temperatura T all'infinito, col che anche A tende all'infinito. In questo caso le parti interferenziali (I2) e (I3) della sezione d'urto tendono a zero mentre la parte continua (8) tende, a prescindere da piccole differenze dovute all'espressione del fattore di forma (9), all'espressione ottenuta da Bethe^{I4} per un solo atomo:

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_1^c(\delta) &\xrightarrow{A \rightarrow \infty} f_1(\delta) - \frac{4}{3} \log 2 \\ \psi_2^c(\delta) &\xrightarrow{A \rightarrow \infty} f_2(\delta) - \frac{4}{3} \log 2 \end{aligned} \right. \quad (I4)$$

essendo $f_1(\delta)$ e $f_2(\delta)$ due funzioni tabulate da Bethe e Heitler^{I3}. Resta ancora da tener conto del contributo degli elettroni atomici. Non esistono tutt'ora calcoli del contributo alla parte interferenziale della sezione d'urto, ma ci sono ragioni per pensare che esso sia trascurabile, in quanto che la carica elettronica è distribuita in una regione a vente dimensioni normalmente maggiori dello spostamento degli atomi dalla loro posizione di equilibrio; in effetti a temperatura ordinaria per i cristalli che ci interessano A è notevolmente minore di $|\beta|^2$; (cfr. ad esempio i valori di $D = A/|\beta|^2$ dati nella tabella I).

Assumeremo perciò nel riguardo degli elettroni le sezioni d'urto di Wheeler e Lamb^{I9}; esse sono date formalmente da espressioni analoghe alle (5), dove però le funzioni Φ_n ed I_m devono essere sostituite rispettivamente dalle seguenti:

$$\Phi_e(y, R) = \frac{1}{2} \left\{ [y^2 + (1-y)^2] \left[\Psi_1(\varepsilon) - \frac{8}{3} \ln 2 \right] + \frac{2}{3} y(1-y) \left[\Psi_2(\varepsilon) - \frac{8}{3} \ln 2 \right] \right\} \quad (I5)$$

$$I_e(x, E_0) = \frac{1}{2} \left\{ [1 + (1-x)^2] \left[\Psi_1(\varepsilon) - \frac{8}{3} \ln 2 \right] - \frac{2}{3} (1-x) \left[\Psi_2(\varepsilon) - \frac{8}{3} \ln 2 \right] \right\} \quad (I6)$$

essendo

$$\varepsilon = \frac{100}{2^{2/3} k} \frac{1}{y(1-y)}$$

ed

$$\varepsilon = \frac{100}{2^{2/3} E_0} \frac{x}{1-x}$$

rispettivamente nella (I5) e nella (I6) ed essendo $\Psi_1(\varepsilon)$ e $\Psi_2(\varepsilon)$ due funzioni tabulate da Wheeler e Lamb^{I9}.

L'ipotesi semplificatrice che conduce alla (2) rende possibile trattare anche il caso di cristalli aventi struttura più complicata di un semplice reticolò cubico. Ad esempio nel caso del diamante e del silicio un cristallo è costituito da due reticoli cubici a facce centrate di passo reticolare a , traslati uno rispetto all'altro lungo una loro diagonale della quantità $(a/4, a/4, a/4)$. Se si costruisce il reticolo inverso di una tale struttura (cfr. appendice) si vede che i vari piani contenenti punti del reticolò inverso e normali, per esempio all'asse $[100]$ si susseguono alla distanza $2\pi/a$ sebbene questa distanza non rappresenti la periodicità del reticolo. Ma se si fa l'approssimazione di considerare la distribuzione dei punti su tali piani come continua, ogni differenza di densità dei punti fra i vari piani scompare ed allora ci si riduce al solito reticolo cubico, di cui $2\pi/a$ rappresenta la periodicità.

Si vede inoltre ad esempio, che i piani contenenti punti del reticolo e normali agli assi $[110]$ ed $[111]$ si susseguono alla distanza

$$\sqrt{2} \frac{2\pi}{a} \quad e \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2\pi}{a}$$

per cui i valori di μ relativamente ai vari assi sono:

$$\mu_{[100]} = \frac{a}{2\pi} \delta; \quad \mu_{[110]} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a}{2\pi} \delta; \quad \mu_{[111]} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{2\pi} \delta \quad (17)$$

essendo a il passo reticolare relativo all'asse $[100]$

I calcoli numerici implicati nelle formule che precedono sono stati eseguiti per monocristalli di Silicio e di Diamante; i valori delle costanti assunti per il calcolo sono dati nella tabella I.

TABELLA I. Costanti usate nei calcoli numerici.

Elemento	Z	M	$a \lambda_c (\text{\AA})$ (asse $[100]$)	T (°K)	Θ (°K)	A	D
Diamante	6	12.01	3.56 ^a	61.1	293	1870 ^b	1260.0338
Silicio	14	28.06	5.42 ^a	46.1	293	645 ^c	282 0.133

^a R.W.G. Wyckoff, Crystal structures (Interscience Publishers, New York 1948 - vol; I, Chap. 2.
^b M. Blackman, Handbuch der Physik, VII - I, 325 (Springer, 1955)
^c P. Flubacher, A.J. Leadbetter, and J.A. Morrison, Phil. Mag. 4, 273 (1959).

Nella Fig. 2 sono rappresentate le funzioni $\psi_{1,2}^c$, e le funzioni $\psi_{1,2}^c + \sum_{h=1}^h \psi_{1,2}^h(0, \delta)$, calcolate mediante le (8) e (13) in funzione sia di δ che di μ .

Nella stessa figura le curve indicate con BH rappresentano la funzione di Bethe e Heitler date dai secondi membri delle (14) e valide per atomi isolati, mentre le curve indicate con WL rappresentano le funzioni di Wheeler e Lamb $\psi_{1,2} - (8/3) \ln Z$ contenute nelle (15), (16) e che tengono

conto del contributo degli elettroni.

Le curve continue si riferiscono all'indice 1, mentre quelle tratteggiate si riferiscono all'indice 2.

La fig. 2a è relativa al silicio orientato con lo asse $[111]$ ad angolo $\theta = 0$ col primario, quindi μ è dato dalla terza delle (17).

La fig. 2b è relativa al diamante orientato con lo asse $[110]$ ad angolo $\theta = 0$ col primario, quindi μ è dato dalla seconda delle (17).

Le funzioni $\sum \psi_{1/2}^h$ hanno per noi un interesse abbastanza limitato, in quanto il loro valore ha importanza solo per grandi valori di δ , cioè quando la schermatura non è completa. Per questa ragione ci siamo limitati a calcolare il loro valore per $\theta = 0$, ciò che è sufficiente per i nostri scopi (cfr. paragrafo IV A 2). Dalle stime di Überall⁴ risulta che col crescere di θ le discontinuità si arrotondano e tendono a spianarsi. Per $\theta \approx 50$ mrad le funzioni $\psi_{1/2}^c + \sum \psi_{1/2}^h$, hanno il valore delle funzioni di Bethe e Heitler per un solo atomo rappresentante nella fig. 2. Nella fig. 3 sono rappresentate le funzioni:

$$\chi_{1,2}(\tau) = \mu \psi_{1/2}^c(\theta, \delta) \quad (18)$$

ottenute mediante le (12); tali funzioni dipendono solo dal rapporto $\tau = \theta/\delta$ e non da θ e δ separatamente. Le curve continue si riferiscono al Silicio, mentre le tratteggiate si riferiscono al diamante.

B. La struttura fine.

Per angoli $\theta \approx \mu = a\delta/2\pi$ il numero dei punti del reticolo inverso che cadono entro il disco degli impulsi di rinculo può essere anche molto piccolo, cosicchè non è lecito sostituire, come ha fatto Überall, un'integrazione alle sommatorie che compaiono nella (I).

Consideriamo allora il solito reticolo cubico di fig. I, nella quale l'impulso \vec{p}_0 ($\sigma \vec{k}$) del primario giace nel

piano (\vec{b}_1, \vec{b}_2), e teniamo conto degli incrementi discontinui alla sezione d'urto che si hanno ogni volta che, variando θ , una fila di punti del reticolo inverso entra nel disco degli impulsi di rinculo. In quel che segue terremo conto dei punti del solo piano $h_1 = 0$; vedremo nel seguito che questo è sufficiente per i nostri scopi. Nei limiti di piccoli angoli i valori θ_{h_2} di θ , per i quali entra nel disco la fila h_2 esima (h_2 intero positivo) di punti del piano $h_1 = 0$ parallela all'asse b_3 , sono:

$$\theta_{h_2} = \frac{a}{2\pi h_2} \delta = \frac{\mu}{h_2} \quad (19)$$

la quale fa vedere che oltre il valore $\theta_1 = \mu$ di θ non si ha più alcuna discontinuità nella sezione d'urto. L'intervallo angolare $\Delta\theta_{h_2}$ tra due discontinuità successive è:

$$\Delta\theta_{h_2} = \frac{\mu}{h_2(h_2-1)} \quad (h_2 = 2, 3, \dots)$$

la quale mostra che mantenendo costante l'energia, se θ_{h_2} diminuisce (cioè se h_2 aumenta), anche l'intervallo $\Delta\theta_{h_2}$ diminuisce; quindi per $\theta \rightarrow 0$ le discontinuità diventeranno sperimentalmente inosservabili.

Alcune delle discontinuità in questione sono state da noi messe in evidenza nel caso della bremsstrahlung, che sotto questi aspetti presenta dei vantaggi rispetto alla produzione di coppie. Infatti, come vedremo in seguito, nelle nostre condizioni sperimentali nel primo caso si hanno valori del minimo impulso di rinculo δ abbastanza minori che nel secondo e questo comporta un minor numero di punti del reticolo compresi nel disco, cioè un allontanamento dell'approssimazione di Uberall, con un conseguente aumento delle discontinuità. I risultati sperimentali saranno presentati nel paragrafo IV.

Per calcolare esattamente la sezione d'urto per reticoli anche non cubici si tratta in definitiva di usare il

fattore interferenziale completo (I) al punto di (2); assumiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali $\vec{b}_i (i=1,2,3)$ e consideriamo, come abbiamo già fatto in quanto precede, solo i punti del reticolo inverso appartenenti al piano \vec{b}_2, \vec{b}_3 ; poichè $g_I = \vec{g} \cdot \vec{b}_I = 0$, il fattore interferenziale (I) si scrive

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi)^3 N}{\Delta} \sum_{\vec{g}} \delta(\vec{q} - \vec{g}) &= \\ &= \frac{(2\pi)^3 N}{\Delta} \sum_{h_2, h_3} \delta(q_1) \delta\left(q_2 - \frac{2\pi}{a_2} h_2\right) \delta\left(q_3 - \frac{2\pi}{a_3} h_3\right) \end{aligned} \quad (20)$$

essendo q_i le proiezioni di \vec{q} su \vec{b}_i , mentre $2\pi/a_i$, nei reticoli da noi presi in considerazione (casi del diamante e silicio), rappresenta la distanza tra due punti consecutivi del reticolo inverso lungo l'asse \vec{b}_i ; infine h_2 ed h_3 sono numeri interi.

Il dettaglio dei calcoli è esposto nell'appendice.

Assumendo che l'impulso \vec{p}_0 o \vec{k} del primario giaccia nel piano di due assi cristallini (ciò che rispecchia le nostre condizioni sperimentali), si ottengono (cfr. appendice) le seguenti funzioni, che devono essere sostituite alle (I2):

$$\begin{cases} \psi_1^{**}(\theta, \delta) = \frac{(2\pi)^2}{\Delta} 8\delta \sum_{\vec{g}} \frac{e^{-A g^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \frac{g^2 - g_2^2 \theta^2}{g_2^2 \theta^2} \\ \psi_2^{0*}(\theta, \delta) = \frac{(2\pi)^2}{\Delta} 48\delta^2 \sum_{\vec{g}} \frac{e^{-A g^2}}{(\beta^2 + g^2)^2} \frac{g^2 - g_2^2 \theta^2}{g_2^4 \theta^4} (g_2 \theta - \delta) \end{cases} \quad (21)$$

La somma vettoriale nelle (21), equivalenti a tre somme sulle componenti $g_i = \vec{g} \cdot \vec{b}_i$ deve esser fatta tenendo conto delle condizioni

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 \geq \delta/\theta \\ g_3 \geq 0 \end{cases} \quad (22)$$

La seconda di queste esprime lo stesso fatto fisico della (I9).

Si vede che, trascurando g_{20} rispetto a g , le funzioni $\int \psi_{1,2}^{0*}(\theta, \delta)$ dipendono solo dal rapporto $\tau = \theta/\delta$, come nel caso di Überall.

Le formule (2I) sono state specializzate nel caso del silicio e del diamante. Tenendo conto della reale struttura cristallina (cfr. Appendice) ed indicando come sempre con a il passo del reticolo diretto secondo l'asse $[100]$ si ha:

a) Caso del silicio, con l'asse $[111]$ formante l'angolo θ con l'impulso del primario.

Se l'impulso del primario giace nel piano degli assi

$[111] \equiv \vec{b}_1$ e $[1\bar{0}1] \equiv \vec{b}_2$ si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \int \psi_1^{0*} &= \frac{128\pi^2}{a^3\tau^2} \sum_{h_2} \sum_{h_3} \frac{\exp[-2A(\frac{2\pi}{a})^2(h_2^2 + 3h_3^2)]}{[\beta^{-2} + 2(\frac{2\pi}{a})^2(h_2^2 + 3h_3^2)]^2} \frac{h_2^2 + 3h_3^2}{h_2^2} \\ \int \psi_2^{0*} &= \frac{96}{a\tau^3} \sum_{h_2} \sum_{h_3} \frac{\exp[-2A(\frac{2\pi}{a})^2(h_2^2 + 3h_3^2)]}{[\beta^{-2} + 2(\frac{2\pi}{a})^2(h_2^2 + 3h_3^2)]^2} \frac{h_2^2 + 3h_3^2}{h_2^4} \left[\sqrt{2} \left(\frac{2\pi}{a} \right) h_2 - \frac{1}{\tau} \right] \end{aligned} \right. \quad (23)$$

dove h_2 ed h_3 sono numeri interi che soddisfano alle relazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} |h_2| &\geq \frac{a}{2\pi} \frac{d}{\sqrt{2}\theta} \\ h_3 &= 2K + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{h_2} \end{aligned} \right. \quad (24)$$

essendo K un numero intero positivo o nullo.

Se invece l'impulso del primario giace nel piano degli assi $[111] = \vec{b}_1$ e $[11\bar{2}] = \vec{b}_2$ si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} \int \psi_1^{0*} &= \frac{128\pi^2}{a^3\tau^2} \sum_{h_2} \sum_{h_3} \frac{\exp[-2A(\frac{2\pi}{a})^2(3h_2^2 + h_3^2)]}{[\beta^{-2} + 2(\frac{2\pi}{a})^2(3h_2^2 + h_3^2)]^2} \frac{3h_2^2 + h_3^2}{3h_2^2} \\ \int \psi_2^{0*} &= \frac{96}{a\tau^3} \sum_{h_2} \sum_{h_3} \frac{\exp[-2A(\frac{2\pi}{a})^2(3h_2^2 + h_3^2)]}{[\beta^{-2} + 2(\frac{2\pi}{a})^2(3h_2^2 + h_3^2)]^2} \cdot \frac{3h_2^2 + h_3^2}{9h_2^4} \left[\sqrt{6} \left(\frac{2\pi}{a} \right) h_2 - \frac{1}{\tau} \right] \end{aligned} \right. \quad (25)$$

in cui h_2 ed h_3 sono numeri interi che soddisfano alle relazioni

$$\begin{cases} |h_2| \geq \frac{a}{2\pi} \frac{\delta}{\sqrt{6}\theta} \\ h_3 = 2K + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{h_2} \end{cases} \quad (26)$$

essendo K un numero interpositivo o nullo. Per poter effettuare il confronto con le analoghe funzioni (I8) di \ddot{U} berall occorre tener presente nel caso attuale il valore dato dalla terza delle (I7) e considerare invece delle (23) e (25) le funzioni:

$$\chi_{1,2}^{0*}(\tau) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{2\pi} \delta\psi_{1,2}^{0*}(\theta, \delta) \quad (27)$$

in cui il fattore di proporzionalità rappresenta il passo reticolare secondo l'asse $[\text{III}]$ diviso per 2π .

b) Caso del diamante, con l'asse $[\text{IIO}]$ formante l'angolo θ con l'impulso del primario nel piano degli assi $[\text{IIO}] \equiv \vec{b}_1$ e $[\text{I}\bar{\text{I}}\text{O}] \equiv \vec{b}_2$. Si ha:

$$\begin{cases} \delta\psi_1^{0*} = \frac{128\pi^2}{a^3\tau^2} \sum_{h_2} \sum_{h_3} \frac{\exp[-8A(\frac{2\pi}{a})^2(2h_2^2+h_3^2)]}{[\beta^2+8(\frac{2\pi}{a})^2(2h_2^2+h_3^2)]^2} \frac{2h_2^2+h_3^2}{2h_2^2} \\ \delta\psi_2^{0*} = \frac{24}{a\tau^3} \sum_{h_2} \sum_{h_3} \frac{\exp[-8A(\frac{2\pi}{a})^2(2h_2^2+h_3^2)]}{[\beta^2+8(\frac{2\pi}{a})^2(2h_2^2+h_3^2)]^2} \cdot \\ \cdot \frac{2h_2^2+h_3^2}{4h_2^2} \left[4\left(\frac{2\pi}{a}\right)h_2 - \frac{1}{\tau} \right] \end{cases} \quad (28)$$

in cui h_2 ed h_3 sono numeri interi che soddisfano alle relazioni:

$$\begin{cases} |h_2| \geq \frac{a}{2\pi} \frac{\delta}{4\theta} \\ h_3 \geq 0 \end{cases} \quad (29)$$

Nel caso attuale le funzioni confrontabili con le analoghe (I8) di \ddot{U} berall sono, tenendo presente la seconda delle (I7)

$$\chi_{1,2}^{0*}(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a}{2\pi} \delta\psi_{1,2}^{0*} \quad (30)$$

in cui il fattore di proporzionalità rappresenta il passo reticolare diretto secondo l'asse $[110]$.

Le relazioni (24), (26), (29) sono conseguenza delle (22) e sono del tutto simili alla (19); ne differiscono solo a causa della struttura reticolare più complessa di quella cubica. Le prime delle (24), (26), (29) forniscono il valore di $\tau = \theta/\delta$ per i quali si hanno le discontinuità nell'andamento delle (23), (25) e (28); in particolare il massimo valore di τ per il quale si hanno discontinuità si ha ponendo $h_2 = 1$.

Nella figura 4 sono rappresentate le funzioni $\chi_{1,2}^{0*}(\tau)$, e la funzione di Überall $\chi_1^0(\tau)$ come confronto, calcolate in funzione di τ a partire dai dati della Tabella I. La curva continua rappresenta $\chi_1^{0*}(\tau)$, quella tratteggiata $\chi_2^{0*}(\tau)$, mentre quella a tratto e punto rappresenta $\chi_1^0(\tau)$, già data in fig. 3.

Nella fig. 4a sono rappresentate le (27), ottenute dalle (23); nella fig. 4b e (27) ottenute dalle (25) e nella fig. 4c le (30).

Dal confronto di queste figure si vede la convenienza di usare un cristallo di diamante, in quanto a causa del suo piccolo passo reticolare, l'effetto interferenziale è maggiore che per il silicio.^(*) La scelta degli assi $[110]$ e $[1\bar{1}0]$ è la più conveniente in quanto la distanza fra punti del reticolo lungo questi assi è la più piccola possibile.

III - Dispositivo sperimentale.

Il dispositivo sperimentale è schematizzato nella fig. 5. R è il radiatore interno alla camera a vuoto del sincrotrone; per lo studio della produzione di coppie tale radiatore era costituito da una lamina di tantalio allo stato policristallino, dello spessore di 0.13 L.R, (lunghezze di radiazione), mentre per lo studio della bremsstrahlung si usa-

(*) Il grande valore dell'effetto interferenziale per il diamante è dovuto anche al suo alto valore della temperatura di Debye, che comporta un valore piccolo per la costante A (cfr. tab. I).

va un radiatore costituito da una lamina circolare del diametro di 18 mm e dello spessore di $2,7 \cdot 10^{-3}$ L.R. (lunghezze di radiazione) ricavata da un cristallo singolo di Silicio, con un taglio perpendicolare all'asse [III] entro ± 4 mrad, come è risultato da un'analisi ai raggi X, con un metodo di riflessione alla Laue. La temperatura del monocristallo rimane praticamente uguale a quella ambiente ($\sim 293^\circ\text{K}$). Il fascio di raggi γ emergente dal radiatore, dopo aver attraversato le pareti della ciambella incontra un primo collimatore circolare in piombo C_1 , normalmente usato con un'apertura di 2.5 mrad; oltrepassa poi un foro praticato in uno schermo di piombo ed un secondo collimatore circolare in piombo C_2 di apertura variabile (1,0 - 0,8 - 0,5 - 0,3 mrad). Dopodichè il fascio entra in un tubo a vuoto chiuso da una finestra di mylar dello spessore di $5 \cdot 10^{-4}$ L.R.; il tubo passa attraverso le espansioni polari di un magnete pulitore B, il quale, con un campo di circa 15 kgauss devia in direzione verticale le particelle cariche che accompagnano il fascio γ . Entro il tubo a vuoto, è collocato un terzo collimatore circolare in piombo C_3 , avente un'apertura di circa 3 mrad; di questi tre collimatori C_2 è quello che definisce con precisione le dimensioni del fascio ed è quindi dotato di movimenti di precisione; C_1 invece ha lo scopo di arrestare una parte del fascio prima che arrivi su C_2 , in modo che la percentuale di fotoni degradati in energia e diffusi da C_2 sia piccola. C_3 ha infine lo scopo di eliminare ancora la parte residua di questi fotoni, che costituiscono una sorta di alone attorno al fascio principale; C_3 non deve in alcun modo disturbare il fascio principale e perciò ha una apertura abbastanza maggiore di C_2 .

Il tubo a vuoto continua fino alla camera a vuoto di uno spettrometro a coppie S che è già stato esaurientemente descritto in un altro lavoro²⁰. La pressione dell'aria

residua è 0,03 mmHg. All'ingresso dello spettrometro a coppie è posto il convertitore in coppie P. Questo, nel caso delle misure sulle proprietà interferenziali della bremsstrahlung, era costituito da un disco circolare di alluminio del diametro di 6 cm e dello spessore di $1,1 \cdot 10^{-3}$ L.R., mentre per lo studio della produzione di coppie era costituito da un disco approssimativamente circolare del diametro di 18 mm e dello spessore di $0,85 \cdot 10^{-3}$ L.R., ricavato da un cristallo singolo di silicio con un taglio perpendicolare all'asse $[100]$ entro $\pm 1^\circ$. La temperatura del monocristallo rimane praticamente quella ambiente.

Le coppie simmetriche di elettroni prodotte nel convertitore ed aventi una certa energia nominale vengono selezionate con opportuno valore del campo magnetico dello spettrometro; gli elettroni, dopo aver attraversato la finestra di mylar che chiude la camera a vuoto (spessore $5 \cdot 10^{-4}$ L.R.) vengono rivelati per mezzo di un sistema convenzionale di contatori a scintillazione $A_1 - A_2 - A_3$ in coincidenza poste col loro centro su traiettorie di uguale energia, a circa 1 m dai bordi del magnete.

Lo spettrometro è stato tarato ed è stato possibile risalire dal campo magnetico all'energia k dei fotoni corrispondenti a fissate traiettorie elettroniche, come è stato spiegato nel lavoro citato²⁰, con un errore

$$k/k = \pm 0,3\%, \text{ largamente ammissibile per i nostri scopi.}$$

Gli scintillatori hanno uno spessore di 3 mm, sufficiente per garantire impulsi luminosi di intensità stabile; la larghezza di A_1 ed A_2 è di 8.5 cm, che corrisponde, nella posizione da essi occupata, ad uno spread in energia dei fotoni $\Delta k/k$ variabile fra 8.5% e 13%, a seconda delle posizioni azimutali occupate dagli scintillatori; questi valori sono ammissibili dato che la maggior parte delle nostre misure non è critica in energia; l'altezza di A_1 ed A_2 è di 10 cm, cioè tale che considerato lo scat-

tering degli elettroni nel convertitore e il loro angolo di emissione naturale rispetto al fotone primario, e tenuto anche conto delle proprietà ottiche dello spettrometro²⁰, non si abbiano perdite verticali di conteggio fino ad un limite inferiore di 50 MeV per l'energia dei fotoni. Il contatore A_3 ha dimensioni maggiori di A_2 (10 x 12 cm²) per tener conto delle deviazioni che subiscono le traiettorie provenienti dal bordo della sorgente rispetto a quella che parte dal centro, e per tener conto anche dello scattering degli elettroni nel contatore A_2 .

Gli scintillatori sono connessi a delle guide di luce che arrivano fino a dei fotomoltiplicatori R.C.A. 6810A.

Il fascio γ non convertito attraversa la finestra di mylar e passa tra due pareti verticali di piombo S, lunghe 100 cm, alte 13 cm, dello spessore di 1,5 L.R.; lo scopo di questa schermatura è di fermare gli elettroni di bassa energia che vengono prodotti nel mylar dai fotoni e che, deflessi dal campo disperso del magnete, attraversano gli scintillatori, producendo un fondo di intensità paragonabile alla velocità di conteggio prodotta nel convertitore P.

Infine il fascio γ , attraversato un tratto in aria, arriva ad un quantmetro ad assorbimento totale Q del tipo Wilson, descritto in altra parte²¹, dove si misura la energia totale da esso trasportata.

Nella fig. 6 è dato uno schema a blocchi dell'apparecchiatura elettronica.

A_1 , A_2 , A_3 sono i tre fotomoltiplicatori R.C.A. 6810A che ricevono gli impulsi luminosi dagli scintillatori, attraverso guide di luce. Gli impulsi provenienti dagli anodi dei fotomoltiplicatori vengono formati mediante cavi formatori, fino ad avere la durata di 6 nsec; tali im

pulsi vengono successivamente inviati, tramite cavi aventi impedenza di 200Ω e lunghi circa 50 m, ad un circuito di coincidenza triple simultanee C_p dal quale proseguono fino ad un circuito di coincidenze triple ritardate C_d , essendo gli impulsi provenienti da A_2 ed A_3 stati ritardati di 20 nsec tramite le linee di ritardo L. C_p e C_d sono coincidenze triple CELE tipo CR68, aventi tempo risolutivo minore di 6 nsec. Gli impulsi provenienti dalle coincidenze vengono amplificati mediante gli amplificatori rapidi A mod CNRN/AR62 avente un tempo di salita di 3,5 nsec ed un guadagno di 30 e discriminati mediante i discriminatori rapidi D Mod. CNRN/DR 405, aventi un tempo di salita di 35 nsec ed un tempo morto di 0,15 μ sec. Gli impulsi di uscita passano poi in un circuito di gate G e vengono successivamente contati dalle scale rapide S_I Hewlett & Packard tipo 510 A e dalle scale lente S_2 Ital Elettronica tipo S II. Il circuito di gate G lascia passare gli impulsi solo in un intervallo di tempo tale che la durata del fascio γ (~ 3 msec) vi sia certamente contenuta dentro; ciò per evitare che il dispositivo misuri il fascio durante il tempo in cui il fascio principale di bremsstrahlung non esiste (~ 47 msec), e, soprattutto durante il periodo di iniezione, in cui l'iniettore genera un forte fondo in tutto l'ambiente. Per ottenere questo si usa un dispositivo a peaking strip P, immerso nel campo magnetico del sincrotrone, dal quale si ottiene all'istante di iniezione un segnale che comanda un generatore di impulsi rettangolari R, a ritardo e durata variabile il quale a sua volta comanda il circuito di gate G che interdice le valvole di ingresso delle scale S_I quando il fascio è assente.

Completa il dispositivo elettronico l'integratore I che misura la carica totale raccolta dal quantmetro Q ed il circuito di predisposizione N mediante il quale si predispone il numero di dosi misurate da I durante le quali si deve eseguire il conteggio.

Particolare cura deve esser posta nella determinazione della posizione angolare dei cristalli; questi sono montati su dispositivi goniometrici che consentono la loro rotazione intorno ad un asse orizzontale ed uno verticale. Per la produzione di coppie il dispositivo è visibile in una figura di un lavoro già citato²⁰. Si approfitta del fatto che il monocristallo è speculare per inviare su di esso un fascio di luce per mezzo di un proiettore dotato di reticolo; si raccoglie così l'immagine luminosa su uno schermo a distanza nota dal cristallo; si misurano così gli angoli rispetto ad una posizione di riferimento scelta in modo che il cristallo^{sia} all'incirca perpendicolare al fascio γ , cioè in modo che approssimativamente l'angolo θ , definito nel paragrafo II, fosse nullo. Le misure di cui riferiremo erano poi in grado di mostrare in quale posizione ciò succedesse realmente (cfr. par. IV.A.I). La sensibilità di questo dispositivo era di 0.5 mrad mentre il suo errore sistematico era $\delta\theta/\theta = \pm 0.2\%$. Per la misura sulla bremsstrahlung da monocristalli, la dipendenza da θ è molto più critica e perciò abbiamo dovuto realizzare un dispositivo molto più sensibile e preciso. Tale dispositivo è visibile in figura 7 e consente di ruotare il monocristallo attorno ad un asse orizzontale ed uno verticale. I due comparatori visibili nella figura misurano i due angoli di rotazione con un errore sistematico relativo $\delta\theta/\theta = \pm 0,05\%$, mentre la sensibilità è di 0.1 mrad.

Nella figura è visibile il monocristallo, in forma di disco circolare, ed anche il radiatore di tantalio, in forma di una lastrina rettangolare, che attualmente è rimosso dal fascio. Tutto il dispositivo è montato in una delle sezioni diritte dell'elettrosincrotrone ed è azionato da motori elettrici telecomandati dalla sala conteggio.

Una camera da ripresa televisiva trasmette diretta-

mente in sala conteggio i valori degli angoli segnati dai quadranti dei comparatori.

L'apparecchiatura sperimentale così come l'abbiamo descritta è quella dalle caratteristiche definitive quale essa le ha assunte attraverso vari rimaneggiamenti. Così per la produzione di coppie ad alte energie ($K = 900$ MeV), si usava il solo collimatore C2 di fig. 5, in quanto i fotoni diffusi e degradati in energia che venivano accettati dallo spettrometro producevano elettroni di bassa energia che non potevano raggiungere i rivelatori. La necessità di introdurre gli altri collimatori si è manifestata invece per le misure sotto i 400 MeV.

Per quanto riguarda i contatori possiamo dire che inizialmente esistevano solo A1 ed A2, i quali sono essenzialmente sufficienti per le misure attuali; A3 è stato aggiunto ad un certo stadio delle misure come facente parte di un dispositivo più complesso per la determinazione dello stato di polarizzazione del fascio γ , le misure di questo tipo sono attualmente in corso e non vengono riportate in questo lavoro. Un miglioramento essenziale si è dovuto apportare al goniometro per la misura degli angoli nell'esperienza sulla bremsstrahlung. Inizialmente tale goniometro era posto nell'interno della ciambella a metà di un quadrante dell'elettrosincrotrone, dove lo spazio disponibile era piuttosto piccolo e dove per di più non si potevano introdurre pezzi di materiale metallico massiccio; di conseguenza la riproducibilità del dispositivo era solamente di $\pm 0,5$ mrad. Successivamente si costruì il goniometro di fig. 7 già illustrato, che ha corrisposto molto bene alle esigenze, permettendo di risolvere, come vedremo, la struttura fine dell'intensità della bremsstrahlung dal cristallo.

IV - Metodo di misura, risultati sperimentali e confronto con la teoria.

A. Produzione di coppie.

Il metodo di misura impiegato per studiare la produzione di coppie nel monocristallo di silicio (asse $[100]$) da fotoni provenienti dal radiatore di tantalio dell'elettrosincrotrone ^{Consiste} nel misurare il numero $N(\theta, k)$ di coppie simmetriche rivelate dai contatori posti in coincidenza a parità di dose di raggi γ misurata dal quantmetro ($6 \cdot 10^{10}$ quanti equivalenti), in funzione di θ , per un'energia nominale dei fotoni $k = 910$ MeV, oppure in funzione di k per $\theta = 0$ e $\theta = 60$ mrad.

Il numero di eventi da considerarsi come coppie simmetriche prodotte nel monocristallo è

$$N(\theta, k) = N_p(\theta, k) - \left\{ N_d(\theta, k) + [N_{bp}(k) - N_{bd}(k)] \right\} \quad (3I)$$

essendo $N_p(\theta, k)$ il numero di coincidenze simultanee, $N_d(\theta, k)$ il numero di coincidenze ritardate, dovuto ad eventi casuali costituiti da elettroni appartenenti a coppie diverse e che passano attraverso i rivelatori; $N_{bp}(k)$ ed $N_{bd}(k)$ rispettivamente le stesse quantità per gli eventi di fondo ottenuto togliendo il monocristallo. (Tale fondo viene ovviamente misurato successivamente al conteggio con monocristallo).

Per ottenere errori statistici piccoli abbiamo preso $N_p(\theta, k) \approx 5 \cdot 10^4$ ed abbiamo scelta l'intensità del fascio in modo che $N_d(\theta, k)$ sia, perlomeno ad alte energie ($k \approx 900$ MeV), dell'ordine del 3,5% di $N_p(\theta, k)$; ne abbiamo così, approfittato per usare il collimatore C2 di fig.5 con un'apertura di 0,8 mrad, per far sì che l'angolo θ formato dal fotone e dall'asse cristallino sia ben definito; l'intensità del fascio dopo la collimazione è risultata di

$3 \cdot 10^9$ quanti equivalenti/minuto; in realtà tutta questa definizione angolare non occorrerebbe, dato che gli angoli interessati al fenomeno sono piuttosto grandi ($\sim 10 \pm 60$ mrad cfr. in seguito).

Ad alte energie i conteggi di fondo N_{bp} sono dell'ordine dell'1% di $N_p(\theta, k)$, per aumentare fino all'8% per $k = 200$ MeV a causa dell'alone di raggi γ molli che accompagna il fascio.

La dose di raggi γ necessaria per ottenere l'occorrente statistica era dell'ordine di $6 \cdot 10^{10}$ quanti equivalenti per $k = 910$ MeV e minore a basse energie, dato che la diminuzione della sezione d'urto per produzione di coppie è sopraffatta dall'aumento del numero di fotoni nello spettro.

Gli scintillatori sono stati posti in una posizione in cui l'intervallo di impulsi da essi accettati era $\Delta p/p = 13\%$ per le misure in funzione di θ e $8,5\%$ per le misure in funzione di k . Questi valori sono largamente ammissibili, data la piccola variazione della sezione d'urto di produzione di coppie all'intorno del valore $y = 0.5$ dell'energia frazionaria degli elettroni.

I) Misure in funzione di θ .

Per effettuare la misura il monocristallo è stato posto con il suo dispositivo di rotazione descritto al par. III in modo che per montaggio il suo asse cristallino $[100]$ fosse circa parallelo al fascio. In quel periodo di tempo non si supposeva ancora l'esistenza di un effetto dovuto alla struttura reticolare e quindi non pensammo ad individuare la posizione degli altri assi perpendicolari ad $[100]$. D'altra parte un effetto di struttura fine non poteva esser certo rilevato nella produzione di coppie, dove, per coppie simmetriche, si ha nel migliore dei casi ($k \approx 900$ MeV) che lo spessore del disco di fig. I è $\sqrt{d} \approx 10^{-3}$, cioè dello stesso ordine del passo reticolare inverso ($2\pi/a = 4,5 \cdot 10^{-3}$), con la conse-

guenza che, ad es. per $\theta = 10$ mrad, il numero di passi reticolari del piano $h_l = 0$ di fig. 1 che sono compresi entro il disco è dell'ordine di 2000 (completamente opposto è il caso della bremsstrahlung, come vedremo); per questa ragione è lecito usare il procedimento seguito da Überall di sostituire un'integrazione al posto delle sommatorie che compaiono in (I); per $\theta \approx 60$ mrad l'effetto di struttura fine può cominciare però ad interessare. Conseguenza importante dell'alto valore del minimo impulso δ è che il numero di punti del reticolo inverso che sono contenuti nel disco varia poco al variare di θ , e la stessa cosa succede quindi della sezione d'urto. Per rendersi conto di ciò si osservi la fig. 8 nella quale a tratto continuo è rappresentata in funzione di θ e per un'energia dei fotoni $k=910$ MeV, la quantità

$$g_t(\theta, k) = \frac{\phi(\theta, k) [1 + (\frac{1}{2})\theta^2] - \phi(0, k)}{\phi(0, k)} \quad (32)$$

avendo posto

$$\phi(0, k) = \phi_n(\theta, k) + \phi_e(k) \quad (33)$$

essendo $\phi_n(\theta, k)$ e $\phi_e(k)$ rispettivamente le funzioni (6) e (15) calcolate per $y = 0.5$ (coppie simmetriche); nel calcolo si è fatto uso dei risultati delle figg. 2a e 3 (silicio, asse $[111]$); poichè $\beta\delta \approx 5 \cdot 10^{-2} \ll 1$, la schermatura si può ancora ritenere completa e perciò nelle (6) si è assunto $\sum \psi_{1,2}^h(\theta, \delta) = 0$; per le funzioni $\psi_{1,2}^0(\theta, \delta)$ abbiamo usato le (12) anzichè le (21) per la ragione spiegata più sopra. Nell'effettuare i calcoli si è tenuto conto delle curve di fig. 3. $\phi(0, k)$ rappresenta ovviamente il valore di $\phi(\theta, k)$ per $\theta = 0$ in cui la sezione d'urto ha un minimo.

La (32) rappresenta la variazione relativa della sezione d'urto per produzione di coppie per l'intero cristallo (compresi gli elettroni) al variare di θ . Il fattore

$I + (I/2)\theta^2$ nella (32) è considerato per tener conto della variazione dello spessore effettivo del cristallo al variare di θ .

Dalla fig. 8 si vede che il massimo effetto da attendersi sperimentalmente è solo di 5,4%; esso inoltre diminuisce sia al diminuire di k sia prendendo coppie non simmetriche, perchè in ogni caso il minimo impulso \mathcal{J} trasferito al nucleo aumenta. Da qui la necessità di eseguire le misure ad alta statistica.

I risultati sperimentali già a suo tempo pubblicati⁹ sono raccolti nella fig. 8, nella quale i vari punti segnati rappresentano il valore di

$$\mathcal{P}_s(\theta, k) = \frac{N(\theta, k) - N(0, k)}{N(0, k)} \quad (34)$$

essendo $N(\theta, k)$ dato dalla (31) per $k = 910$ MeV ed $N(0, k)$ il valore di $N(\theta, k)$ per $\theta = 0$. Abbiamo voluto verificare che effettivamente non vi fosse dipendenza dell'effetto dall'orientazione del piano individuato dall'asse cristallino $[100]$ e dalla direzione del fotone (queste direzioni formano l'angolo θ) e perciò le figg. 8a ed 8b si riferiscono rispettivamente ad angoli θ contenuti in un piano verticale ed orizzontale rispettivamente. La misura dell'angolo θ è stata fatta prendendo inizialmente un punto di riferimento come è stato spiegato nel par. III e assumendo susseguentemente come angolo zero quello per il quale i risultati sperimentali si adattavano meglio alla curva teorica. Dalla fig. 8 si vede che, affidandoci alla notevole pendenza della curva, si può determinare la posizione dell'asse cristallino con una sensibilità di ~ 2 mrad; molto meglio si può fare, come vedremo, nel caso della bremsstrahlung. L'errore statistico propagato sulla (34) e dovuto agli errori statistici su tutte le quantità contenute nella (31) è risultato per tutti i punti sperimentali

$$\Delta \mathcal{P}_s = \pm 0.7 \%,$$

mentre gli errori sistematici non influenzano i risultati, trattandosi di misure relative.

Come si vede, l'accordo fra i risultati sperimentali e la teoria è notevole, sebbene che per grandi angoli i primi sono sistematicamente più alti della curva teorica e tendono alla retta tratteggiata, che rappresenta il valore della (32), nella quale però si introduca al posto di $\phi_n(\theta, k)$ la sezione d'urto di Bethe e Heitler per atomi non ordinati nello spazio, ciò che si ottiene sostituendo nella (6) al posto delle funzioni contenute nella parentesi quadra le funzioni che compaiono nei secondi membri delle (14); $\phi_n(0, k)$ invece è sempre dato dalla (6).

Una spiegazione di ciò la si può intravedere alla luce di quello che abbiamo imparato dalle misure sulla bremsstrahlung (cfr. in seguito); infatti, come già abbiamo detto, per valori $\theta \approx 60$ mrad possono cominciare a farsi sentire gli effetti della struttura reticolare che aumentano il valore della sezione d'urto. Ma al tempo delle misure sulla produzione di coppie⁹ noi non supponevamo ancora tutto ciò e quindi non si pensò ad individuare la posizione degli assi perpendicolari all'asse 100. Perciò non abbiamo nemmeno tentato di calcolare la sezione d'urto in base alle (21).

2) Misure in funzione dell'energia.

Nella fig. 9 è rappresentata a tratto continuo in funzione dell'energia dei fotoni k la funzione (32) calcolata fra $\theta = 60$ mrad e $\theta = 0$, cioè in corrispondenza del valore massimo dell'effetto di fig. 8. Il calcolo di $\phi_n(0, k)$ si è fatto tenendo presente che $\psi_{1,2}^0(0) = 0$ e che quindi il contributo interferenziale è dato solo dalle funzioni (13); per calcolare $\phi_n(\theta, k)$ bisognerebbe conoscere le funzioni $\sum_{h \geq 1} \psi_{1,2}^h(\theta, \delta)$ per $\theta = 60$ mrad; come abbiamo detto al par. II, questo calcolo non è stato svolto, per

chè, confortati dal fatto che nella fig. 8, per grandi valori di θ , i dati sperimentali tendono alle linee tratteggiate, abbiamo sostituito a $f_n(\theta, k)$ per $\theta = 60$ mrad, la sezione d'urto di Bethe e Heitler, ottenuta come è stato detto al punto I).

Nella fig. 9 sono visibili le discontinuità, dovute al fatto che il disco di fig. I, che per $\theta = 0$ è verticale, allontanandosi dall'origine al diminuire di k , attraversa successivamente i piani $h_I = 1, 2, 3$.

I punti sperimentali della fig. 9 rappresentano la quantità (34) misurata fra $\theta = 60$ mrad e $\theta = 0$, in funzione di k ; essi sono stati ottenuti nel solito modo misurando $N(\theta, k)$ per il valore di $\theta = 60$ mrad della figura 8b), variando l'energia k dei fotoni col variare del campo magnetico nello spettrometro a coppie. Per gli errori valgono le stesse considerazioni fatte al punto I.

Si può notare il sostanziale accordo fra l'andamento teorico e quello sperimentale al variare dell'energia; in particolare l'accordo è molto buono in corrispondenza di $k=400$ MeV, dove l'effetto è nullo, e questo è un notevole controllo del buon funzionamento di tutto il dispositivo sperimentale. Anche la prima discontinuità è stata rivelata agevolmente, come si vede; naturalmente si ha un effetto di allargamento sperimentale della discontinuità in quanto sia θ che k hanno un certo spread, che ha poca influenza sui valori assoluti delle sezioni d'urto, ma influisce invece sulle loro differenze relative.

Si è potuto rivelare solo la prima discontinuità in quanto le altre hanno entità minore ed inoltre al di sotto di 150 MeV il fondo comincia a diventare proibitivo.

Concludendo possiamo dire che con i valori massimi di k disponibili nel nostro sincrotrone (1000 MeV) i valori del minimo impulso trasferito al nucleo sono così grandi che il procedimento seguito da Überall è valido e l'accordo fra

le sue formule ed i risultati sperimentali è buono.

B. - Bremsstrahlung.

Con il dispositivo descritto nel par. III abbiamo misurato il numero $N(\theta, k)$ di coppie simmetriche prodotte nel convertitore di alluminio dello spettrometro a coppie da raggi γ di energia k provenienti dal monocristallo di silicio disposto nell'elettrosincrotrone con l'asse cristallino [III] formante l'angolo θ con la direzione del fascio di elettroni incidenti, aventi energia $E_0 = 1 \text{ GeV}$.

In questo modo abbiamo potuto studiare l'andamento dell'intensità della bremsstrahlung sia in funzione di θ per una certa energia k sia in funzione di k per un certo angolo θ .

Il numero $N(\theta, k)$ è ottenuto come nella (31), cioè tenendo conto delle coincidenze ritardate e del fondo, per una dose fissata di raggi γ , precisamente 10^{10} quanti equivalenti. L'intensità della bremsstrahlung $I(\theta, x, E_0)$ è la somma della (7) e della (16) e si ha:

$$I(\theta, x, E_0) = I_n(\theta, x, E_0) + I_e(x, E_0) = S \frac{N(\theta, k)}{\Phi_p(y, k)} \frac{\int_0^1 I(\theta, x, E_0) dx}{\gamma Q}$$

essendo S una costante, $\Phi_p(y, k) = \Phi_n(y, k) + \Phi_e(y, k)\Phi_n(y, k)$ e $\Phi_e(y, k)$ le sezioni d'urto per produzione di coppie nel convertitore di alluminio dello spettrometro a coppie rispettivamente nel campo del nucleo e dell'elettrode, γ la costante del quantmetro ($\gamma = 4,79 \cdot 10^{18} \text{ MeV/Coulomb}$), Q la carica raccolta dal quantmetro durante il conteggio di $N(\theta, k)$; $\Phi_n(y, k)$ è data dalla (6) nella quale però al posto delle funzioni in parentesi quadra devono essere introdotte le funzioni a secondo membro delle (14) mentre $\Phi_e(y, k)$ è data dalla (15) per $z = 13$; naturalmente, trattandosi di coppie simmetriche è $y = 1/2$.

I) Misure in funzione di θ .

Dalla (35) si vede che, variando θ , anche misurando a parità di Q , $I(\theta, x, E_0)$ non è proporzionale a N/ϕ_p , perchè l'integrale a secondo membro dipende da θ . Per eliminare questo integrale è sufficiente misurare a parità di dose e per un certo angolo θ a due diverse energie k e k_0 , e fare il rapporto:

$$\frac{I(\theta, k)}{I(\theta, k_0)} = \frac{N(\theta, k)}{N(\theta, k_0)} \frac{\phi_p(y, k_0)}{\phi_p(y, k)}$$

Abbiamo scelto $k_0 \approx 900$ MeV perchè a questa energia l'intensità della bremsstrahlung ha una dipendenza trascurabile da θ . Con la dose di raggi γ fissata a 10^{10} quanti equivalenti $N(\theta, k_0)$ varia da ~ 8000 a ~ 12000 al variare di θ ; l'intensità del fascio γ rimane relativamente alta a causa degli attraversamenti multipli del radiatore da parte degli elettroni: con il collimatore C_2 da $0,8$ mrad essa è $\sim 3 \cdot 10^9$ quanti equivalenti/minuto. In queste condizioni e per $k = 100$ MeV, le coincidenze ritardate sono circa il 10% delle simultanee, mentre il fondo è circa 1%.

Per effettuare un controllo della teoria si dovrà dunque confrontare il rapporto sperimentale

$$R_s(\theta, k) = \frac{N(\theta, k)}{N(\theta, k_0)} \frac{\phi_p(y, k_0)}{\phi_p(y, k)} \quad (36)$$

con il rapporto teorico

$$R_t(\theta, k) = \frac{I(\theta, k)}{I(\theta, k_0)} \quad (37)$$

Nella fig. 10 sono riportati i valori delle (36) e (37) relativi a misure già pubblicate¹⁰ e ottenute con il monocristallo di silicio orientabile con il dispositivo della prima versione (cfr. par. III).

Nella (35) si è preso per $I_n(\theta, x, E_0)$ la funzione ottenuta in base alle formule di Überall (12), e cioè te-

nendo conto dei risultati della fig. 3. La fig. 10a si riferisce a $k = 80$ MeV mentre la fig. 10 b, si riferisce a $k = 240$ MeV ($k_0 = 910$ MeV). L'errore statistico ΔR_S è sempre minore di $2 \cdot 10^{-2} R_S$ ed è indicato per alcuni punti nelle figure.

Le misure furono eseguite con il solo collimatore C_2 (cfr fig. 5) da 0.8 mrad; la determinazione della posizione dell'asse cristallino [III] è stata effettuata con un metodo del tutto analogo a quello descritto al punto A di questo paragrafo.

L'accordo fra i risultati sperimentali e i calcoli di Überall risultò qualitativamente buono, dimostrando che l'effetto di coerenza certamente esisteva, contrariamente a quanto risultava dall'esperienza di Panofsky e Saxena⁷. In particolare fu messa in evidenza per la prima volta l'esistenza del minimo centrale per $\theta = 0$, che non risultava dagli esperimenti di Frisch ed Olson⁶ e Saxena⁸, per la scarsa risoluzione in energia.

A proposito del minimo centrale furono fatti dei calcoli da Schiff¹¹, che ne spiegavano l'assenza nell'esperienza di Frisch e Olson. Successivamente tali calcoli furono ripresi da Auvil e Schiff¹² per spiegare l'esistenza di mostrata invece dal nostro esperimento.

Tornando ai nostri risultati, la spiegazione delle differenze esistenti in fig. 10 fra risultati teorici e sperimentali fu da noi inizialmente attribuita alla collimazione.

Effettivamente la (7) è il risultato di un'integrazione sull'angolo di emissione di fotoni rispetto all'elettrone primario, mentre i collimatori usati nelle esperienze operano una selezione angolare dei fotoni. Ora l'intensità della bremsstrahlung, differenziale nell'angolo di emissione dei fotoni, ha una forte dipendenza da tale angolo^{5,22}; un calcolo attendibile dell'effetto di collimazione presuppone l'integrazione di questa, sull'angolo accettato dal col

limatore, tenendo però anche conto dell'estensione della sorgente, della divergenza angolare e dello scattering multiplo del fascio di elettroni incidenti sul radiatore. Poichè il numero di attraversamenti multipli del radiatore da parte degli elettroni è un dato che non conosciamo con esattezza, abbiamo rinunciato ad eseguire un calcolo completo, limitandoci a determinare l'intensità differenziale della bremsstrahlung al centro del fascio (situazione corrispondente ad un collimatore infinitamente stretto), considerando il fascio di elettroni incidenti sul monocristallo come puntiforme e privo di divergenza angolare e tenendo conto dello scattering multiplo dovuto ad un solo attraversamento del monocristallo di silicio (avente spessore $t_0 = 2,7 \cdot 10^{-3}$ L.R.).

Si ottenne come risultato un valore che, in corrispondenza dell'angolo θ per cui in fig. 10 a si ha il massimo, è circa due volte il valore della stessa figura.

Ritenemmo quindi possibile spiegare la differenza di fig. 10 mediante un effetto di collimazione.

Dalla fig. 10 si vede che i punti sperimentali non hanno un andamento regolare; attribuimmo ciò ad una mancanza di ripetibilità nella misura degli angoli (la riproducibilità è di $\pm 0,5$ mrad - cfr. par. III); perciò abbiamo effettuate di nuovo le misure con il dispositivo goniometrico migliorato descritto nel par. III, e avente una riproducibilità di 0,1 mrad.

In fig. II sono presentati alcuni risultati sperimentali di queste misure, relativi ad un'energia dei fotoni $k=100$ MeV. In ascissa è rappresentato il solito angolo θ compreso fra l'asse [III] e la direzione dell'elettrone incidente; il suo valore di zero è stato determinato come già detto per la figura 10. In ordinata è rappresentato il numero di conteggi per unità di dose di $5 \cdot 10^9$ quanti equivalenti, ottenuto come nella (31) (Non si può riportare la (36) perchè $N(\theta, k_0)$ non è stato misurato). Per alcuni punti è riportato l'errore statistico

mentre l'errore accidentale nella misura di θ (± 0.1 mrad) non è visibile con la scala usata. La linea che congiunge i punti sperimentali è stata tracciata unicamente per indicare l'andamento, e non è stata ottenuta col metodo dei minimi quadrati. Queste misure, ripetute a distanza di tempo sono risultate ripetibili entro gli errori sperimentali, ma non si accordavano in alcun modo con le previsioni di Uberall. Ci siamo quindi trovati di fronte ad un nuovo effetto, la "struttura fine", per spiegare la quale abbiamo elaborato dapprima il semplice modello cubico del par. II B, ed in seguito il modello completo che teneva conto della struttura reticolare del silicio. Siamo così pervenuti a trovare come contributo interferenziale del piano reticolare $h_1 = 0$ all'intensità della bremsstrahlung le funzioni (23) o (25) da sostituire alle (12) ricavate da Uberall considerando una distribuzione continua di punti nel reticolo inverso. Il contributo continuo rimane invece ovviamente lo stesso ed è dato dalle (8).

Per effettuare il confronto delle (23) e (25) con l'esperienza era necessario individuare la coppia di assi $[101]$ e $[1\bar{2}1]$ (oppure alternativamente la coppia $[1\bar{1}0]$, $[11\bar{2}]$ oppure ancora $[01\bar{1}]$, $[\bar{2}11]$), mutuamente perpendicolari fra loro ed all'asse $[111]$. Per ottenere questo si deve tener presente che se l'impulso \vec{p}_0 dell'elettrone primario non appartiene al piano dei due assi \vec{b}_1 e \vec{b}_2 , come invece è supposto nelle (23) e (25), le formule corrispondenti a queste ultime dipenderanno dall'angolo dietro φ formato dai piani (\vec{p}_0, \vec{b}_1) e (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Nelle (23) e (25) è risultato comodo assumere $\varphi = 0$ per non complicare troppo i calcoli numerici; d'altra parte ci si può sempre ridurre sperimentalmente a questo caso, come fra poco vedremo. Se dunque si esegue una misura mantenendo k e θ costante e variando solo φ , a differenza da quello che succederebbe se fosse valida l'approssimazione di Uberall, si deve trovare una variazione dell'intensità della bremsstrahlung. Per

verificare ciò abbiamo fatto delle misure mantenendo θ costante con delle rotazioni combinate del cristallo attorno a due assi di rotazione verticale ed orizzontale. Si è ottenuta una variazione del conteggio che è periodica nell'angolo compreso fra il piano dell'asse $[111]$ e \vec{p}_0 ed il piano orizzontale. Il valore massimo del conteggio si ha se \vec{p}_0 appartiene al piano dell'asse $[111]$ e di uno degli assi $[11\bar{2}]$, $[\bar{1}21]$, $[\bar{2}11]$, come dimostreremo fra poco. Abbiamo allora ruotato il cristallo nel suo piano in modo che l'asse corrispondente ad uno dei massimi venisse a coincidere, entro $\pm 1^\circ$, con un asse di rotazione del goniometro. Compiendo una rotazione attorno all'altro asse si ha che \vec{p}_0 appartiene sempre a (\vec{b}_1, \vec{b}_2) entro $\pm 1^\circ$ e si possono così usare le (23), (25), dato che la variazione dell'intensità della bremsstrahlung non è molto critica con ψ .

In fig. 12 sono rappresentati i valori sperimentali R_s (36) ottenuti per $k = 100$ MeV, $k_0 = 850$ MeV, e \vec{p}_0 appartenente al piano degli assi sopra citati, in funzione dell'angolo θ fra l'asse $[111]$ e la direzione dell'elettrone incidente; le misure sono state effettuate con il collimatore C_2 da 1 mrad (erano presenti anche i collimatori C_1 e C_3 della fig. 5); per gli errori di misura vale quanto detto per la fig. 11.

La curva tracciata nella figura rappresenta la funzione R_t (37), ottenuta prendendo per $I_n(\theta, k)$ le (7) dove però al posto delle funzioni di Überall $\psi_{1,2}^0$ date dalle (12) si sono introdotte le (25), valide in questo caso, (cfr. fig. 4b); le funzioni $\psi_{1,2}^c$ sono invece date ancora dalle (8) di figura 2a. Per quanto riguarda il contributo dei piani $h_1 \neq 0$ esso è certamente trascurabile per $k = 100$ MeV, e lo è ancora con buona approssimazione per $k_0 = 850$ MeV, dato il piccolo valore del minimo impulso trasferito δ ; questa è la ragione per la quale non abbiamo valutato le funzioni corrispondenti alle (13) nel nostro modello (cfr. par. II B).

Dalla fig. 12 si vede che i massimi sperimentali laterali si hanno per $|\theta| \approx 2,6$ mrad, cioè proprio per quel valore che

da luogo ad una distanza fra due punti consecutivi del reticolo pari a $2\pi/\sqrt{6}a$. In base alla prima delle (26) possiamo dunque concludere che l'asse individuato dai massimi della fig. 11 è effettivamente uno fra gli assi $[11\bar{2}]$, $[\bar{1}21]$, $[\bar{2}11]$, come avevamo asserito più sopra.

Si può osservare che l'accordo fra i calcoli ed i risultati sperimentali è molto migliorato rispetto alla fig. 10, ottenuta nell'approssimazione di Uberall; in particolare, non è necessario ricorrere ad uno spettro differenziale nell'angolo di emissione dei fotoni. Il collimatore da 1 mrad usato è in effetti abbastanza largo per effettuare una sostanziale integrazione su tale angolo.

Nella regione delle discontinuità di fig. 12 l'accordo non può essere evidentemente così buono come per i grandi valori di θ a causa della mancanza di risoluzione in θ , k e γ del dispositivo sperimentale. Così è stato possibile mettere in evidenza solo le discontinuità più laterali della fig. 12, con una risoluzione in θ di circa ± 0.5 mrad. Invece il minimo centrale è individuabile con una incertezza di 0.1 mrad. Abbiamo così un mezzo per individuare con grande precisione la posizione di un asse cristallino.

La risoluzione in θ del dispositivo sperimentale dipende dalle caratteristiche della sorgente di raggi γ : il fascio di elettroni ha un'estensione finita ed una divergenza angolare che non ci è esattamente nota a causa della mancanza della conoscenza del numero di attraversamenti multipli del radiatore compiuto dagli elettroni prima di irradiare. Per questa ragione non abbiamo potuto apportare nessuna correzione alla curva teorica di fig. 12 per tener conto della risoluzione. Si può però cercare di migliorare quest'ultima aumentando la collimazione del fascio γ . Infatti i fotoni emessi in avanti secondo la direzione centrale del fascio di elettroni, provengono preferenzialmente da elettroni che hanno irraggiato dopo esser

penetrati per piccoli strati del radiatore e che quindi hanno subito un piccolo scattering multiplo rispetto alla direzione di incidenza. Per questi elettroni i relativi angoli θ hanno valori che sono contenuti entro limiti molto più ristretti di quelli relativi al caso di un grande angolo accettato dal collimatore. La dimensione orizzontale della sorgente, maggiore di quella verticale a causa della spiralizzazione compiuta dagli elettroni che attraversano più volte il monocristallo, può essere diminuita disponendo in corrispondenza del massimo delle oscillazioni di betatrone un bersaglio interno alla camera a vuoto del sincrotrone che arresti gli elettroni. (Ciò va naturalmente a scapito dell'intensità).

2) - Misure in funzione di k .

Anche le misure in funzione di k sono state eseguite inizialmente col vecchio dispositivo goniometrico e già pubblicate¹⁰. Anche in questo caso non eravamo a conoscenza dell'esistenza della struttura fine, e perciò non pensammo ad individuare l'angolo ψ già definito al punto I.

Nella fig. I3 è rappresentata la quantità $I(x, \theta, E_0)$ definita nella (35), calcolata nell'approssimazione di Ueberall, per i due valori $\theta = 1$ mrad e $\theta = 6$ mrad. Le discontinuità sulla testa dello spettro sono state calcolate tenendo conto delle (I3) (cfr. fig. 2a) e cioè per $\theta = 0$; ma per i valori attuali di θ le $\Sigma \psi_{1,2}^h(\theta, \delta)$ non sono molto diverse (cfr. par. II A).

I punti rappresentano i risultati sperimentali; precisamente essi sono dati dalla quantità

$$\frac{\lambda N(k, \theta)}{\Phi_p(y, k)} \quad (38)$$

essendo $\Phi_p(y, k)$ già stata definita ed essendo λ un fattore costante di normalizzazione scelto in modo che il valore sperimentale coincida con quello teorico a 900 MeV.

Le misure sono state effettuate con il collimatore C_2 da 0.8 mrad. Le differenze esistenti sulla testa dello spettro fra risultati sperimentali e le curve continue sono dovute all'intervallo di impulsi accettato dagli scintillatori per cui l'intervallo di variabilità dell'energia dei fotoni rispetto al valore centrale k è $\Delta k/k = \pm 8,5\%$. L'errore statistico è minore del 2% ed è indicato per alcuni punti della figura.

I circoletti sono relativi alle misure per $\theta = 1 \pm 0,5$ mrad mentre le croci sono relative a $\theta = 6 \pm 0,5$ mrad^(x). Questi angoli corrispondono rispettivamente ai massimi delle figg. IO a), IO b). Si può osservare che per $\theta = 6$ mrad i punti sperimentali si distaccano nettamente dalla curva teorica al disotto di $k = 300$ MeV. E precisamente, fino a circa 150 MeV i punti sono più alti della curva sperimentale, mentre al disotto di 150 MeV sono più bassi. Questa discesa è reale fino a 50 MeV; al di sotto di questo valore le perdite verticali di conteggio nei contatori dovute allo scattering multiplo degli elettroni nel convertitore cominciano ad intervenire, come abbiamo verificato misurando un normale spettro di bremsstrahlung da un radiatore di tantalio; perciò la discesa dei dati sperimentali è fittizia.

Il confronto fra i risultati e la curva relativa a $\theta = 1$ mrad non è molto significativo, perchè l'intensità della bremsstrahlung intorno a $\theta = 1$ mrad dipende molto criticamente da θ , e l'errore sulla misura dell'angolo è, col vecchio dispositivo, di 0,5 mrad.

Le differenze fra i risultati sperimentali e le curve teoriche si possono evidentemente spiegare alla luce

(x) Nel lavoro già pubblicato^{IO} questi due valori degli angoli sono stati scambiati fra loro per una svista.

della struttura fine; non è possibile però eseguire un confronto quantitativo in quanto non sono conosciute le posizioni degli assi perpendicolari all'asse [III].

Come conclusione possiamo dire che l'esistenza della struttura fine altera completamente la forma dello spettro di bremsstrahlung rispetto a quello ottenuto nell'approssimazione di "Uberall", con la tendenza a dare dei picchi per opportuni valori di θ ; si intravede così la possibilità di "monocromatizzare" lo spettro. Su questo torneremo al par. seguente.

V - Conclusioni.

Fino ad ora abbiamo usato solo monocristalli di silicio. E' nostra intenzione ripetere alcune delle misure con un monocristallo di diamante, del quale si sono enunciate le particolari e vantaggiose caratteristiche nel par. II.B. Questo si mostra molto promettente come polarizzatore del fascio γ . "Uberall ha mostrato⁵ come sia conveniente usare come polarizzatore un cristallo; ma i suoi risultati riguardanti l'ammontare di polarizzazione non saranno più validi per il diamante, dato che il piccolo valore del passo reticolare non si concilia con l'approssimazione dei piani reticolari continui nel reticolo inverso. Abbiamo già dato corso di effettuazione ad un programma di calcoli e misure su questo argomento, ma rimandiamo la discussione ad un prossimo articolo.

Come conseguenza dell'esistenza della struttura fine da noi trovata è possibile prevedere però un utile impiego di un diamante come mezzo per ottenere fasci di fotoni selezionati in energia, (e per di più parzialmente polarizzati), specialmente negli elettrosincrotroni in costruzione e di energia molto maggiore di 1 GeV. Abbiamo già visto nella fig. 13 una tendenza dello spettro di bremsstrahlung a presentare un innalzamento del suo valore in una regione limitata dello spettro; questo è stato ottenuto ancora col silicio e con l'energia degli elettroni $E_0 = 1$ GeV. Aumentando E_0 aumenta anche il valore di $x = k/E_0$ per il quale si ha lo stesso impulso di rinculo minimo δ ; per la (21) l'effetto interferenziale dovuto al piano $h_1 = 0$ rimane invariato se rimane costante δ (ed anche θ), e quindi al crescere di E_0 le discontinuità dello spettro, che per piccoli valori di E_0 si avevano per $x \rightarrow 0$, si raccolgono tutte verso la testa dello spettro, ma conservano la stessa ampiezza.

Come eventualità possibile vogliamo prendere in esame il caso in cui sia $E_0 = 6$ GeV e si desidera uno spettro in cui

la prima discontinuità (la più alta) si incontra per $k=1$ GeV, quando si usi un cristallo di diamante in cui l'asse $[110]$ forma l'angolo ϑ con l'elettrone primario e l'asse $[001]$ appartiene ai piani dell'asse $[110]$ e dell'elettrone. In questo caso, che come abbiamo visto al par. II.B, è il più favorevole, valgono le (28) rappresentate in fig. 4c; in base alla (29) calcolata per $h_2 = 1$, si trova, che il valore dell'ascissa per il quale si ha la discontinuità più alta in fig. 4c è $\tau = 36.6$ e poichè con i valori dati di k ed E_0 deve risultare $\delta = 8,55 \cdot 10^{-6}$, si ottiene che il valore dell'angolo compreso fra l'asse $[110]$ e l'elettrone incidente deve essere $\vartheta = 0.31$ mrad.

Partendo da questi dati abbiamo così calcolato l'intensità della bremsstrahlung nel campo dei nuclei $I_n(\vartheta, k, E_0)$ data dalla (7) in cui al posto delle funzioni di Überall $\psi_{1,2}(\vartheta, \delta)$, date dalle (12) sono sostituite le (28) da noi calcolate; poichè la schermatura si può ritenere completa praticamente fino a 5.95 GeV, abbiamo assunto come nullo su tutto lo spettro l'effetto dei piani $h_1 \neq 0$, cioè abbiamo assunto come uguali a zero le corrispondenti delle (13) nel nostro modello. Lo spettro ottenuto è già stato pubblicato²³ e qui viene ripresentato in fig. 14.

Si può osservare come nello spettro la prima discontinuità domina le altre; il rapporto fra il suo valore di picco ed il valore dello spettro nelle vicinanze della testa è circa 80. In un certo senso si può parlare di una "riga" di fotoni associata a tale discontinuità; la larghezza di tale riga a metà altezza, relativamente al valore $k = 1$ GeV è $\Delta k/k=0,25$.

Gli spettri per $\vartheta = 0$ e $\vartheta \gg 0,31$ mrad non presentano righe perchè degenerano in un normale spettro continuo di bremsstrahlung che si raccorda con la parte relativa a $k > 3$ GeV di fig. 14. Questo può essere molto utile perchè da misure di confronto per due diversi valori di ϑ si può detrarre l'influenza

za di parte dello spettro che si ha per $k > 1$ GeV e che è indesiderabile.

Il problema sperimentale di realizzare un fascio di raggi γ avente queste caratteristiche non è di risoluzione immediata, soprattutto per la piccolezza degli angoli θ in gioco. Infatti la situazione presa in esame è relativa ad un fascio di elettroni privo di divergenza angolare, di dimensioni nulle e senza attraversamenti multipli nel radiatore. Tutti questi fattori invece esistono e concorrono a rendere θ non univocamente definito, per cui la riga di fotoni risulterà allargata e diminuita in altezza.

La situazione non è però peggiore di quella relativa ad energie E_0 minori perchè per ottenere in questo caso righe di altezze uguali alle precedenti (ciò che si ottiene per valori di x minori del precedente) si deve prendere lo stesso valore di θ .

Molto si potrà ottenere con la collimazione, come è già stato spiegato nel par. IV.B.1; nel caso attuale l'angolo di emissione naturale della bremsstrahlung è $mc^2/E_0 \approx 10^{-4}$ rad. Con un collimatore avente questa accettanza è possibile discriminare fotoni emessi ad angoli $\approx 10^{-4}$ rad con l'asse del fascio senza distruggerlo completamente, ottenendo così una definizione angolare di θ abbastanza buona. Da notare che così operando non si ottiene uno spettro integrato sull'angolo di emissione dei fotoni, ed esso risulta esaltato, come già si è accennato al par. IV.B1. La ragione di ciò sta nel fatto che così facendo il disco di fig. 1 si assottiglia mantenendo costante la sua distanza dall'origine. In tal modo si riesce a diminuire la larghezza della riga a metà altezza, a scapito naturalmente dell'intensità. Questa diminuzione di intensità sarà in parte compensata dall'altezza della riga rispetto ad uno spettro da un radiatore normale. Noi speriamo che quanto ora detto possa aprire qualche nuova possibilità nella speri-

mentazione alle altissime energie, per esempio negli esperimenti di fotoproduzione singola di pioni, dove uno spettro quasi monocromatico può riuscire utile per discriminare gli eventi di fotoproduzione doppia.

AppendiceCalcolo della sezione d'urto per bremsstrahlung tenendo conto della struttura cristallina^(x).

In quel che segue, per non dover precisare il significato di molti simboli, useremo quelli stessi di Überall della ref. 4 senza dare alcuna nuova definizione. La sezione d'urto interferenziale per bremsstrahlung si può esprimere mediante la seguente formula

$$\sigma_{tbr}^i = \frac{(2\pi)^3}{\Delta} \frac{1}{h_1 h_2} \int \delta(\vec{q} - \frac{\vec{a}_1}{a_1}) \delta(\vec{q} - \frac{\vec{a}_2}{a_2} - \frac{2\pi h_2}{a_2}) \delta(\vec{q} - \frac{\vec{a}_3}{a_3} - \frac{2\pi h_3}{a_3}) \delta_{\beta H} d\Omega_1 d\Omega_3 \quad (IA)$$

dove

$$d\Omega_1 = d\Theta_1 d\Phi_1$$

$$d\Omega_3 = d\Theta_3 d\Phi_3$$

L'integrazione su tre delle quattro variabili che compaiono nella (IA) sarà eseguita mediante le funzioni di Dirac, la quarta variabile sarà integrata analiticamente. Il risultato finale sarà un'espressione della σ_{tbr}^i sotto forma di sommatoria doppia.

L'argomento della funzione di Dirac espresso in funzione delle variabili angolari del fotone e dell'elettro-ne secondario è

$$\vec{q} \frac{\vec{a}_1}{a_1} = p_1 \cos \theta - p_2 \cos \theta_2 - k \cos \theta_3 \approx q_2 - \theta (u \cos \Psi_1 + v \cos \Psi_3)$$

Dove

$$u = k \Theta_1$$

$$v = E_2 \Theta_2$$

$$q_2 = p_1 - p_2 \cos \Theta_3 - k \cos \Theta_1 \approx \delta + \frac{u^2}{2k} + \frac{v^2}{2E_2}$$

Esprimendo Ψ_1 tramite Ψ_3 e l'angolo Ψ formato dai

(x) Questa appendice è dovuta a G. Barbiellini.

pioni

$$(\vec{p}_1, \vec{k}) (\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

si ha:

$$\vec{q} \frac{\vec{a}_1}{a_1} = q_2 - \theta [u \cos(\psi_3 - \psi) + v \cos \psi_3]$$

L'argomento della prima funzione delta si annulla allora per

$$q_2 = \theta [\cos \psi_3 (u \cos \psi + v) + \sin \psi_3 u \sin \psi]$$

$$q_2 = \theta \sqrt{u^2 \sin^2 \psi + u^2 \cos^2 \psi + v^2 + 2uv \cos \psi} \left[\cos \psi_3 \frac{u \cos \psi + v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \psi}} + \sin \psi_3 \frac{u \sin \psi}{\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \psi}} \right]$$

$$q_2 = \theta q_1 \cos(\psi_3 - \alpha)$$

con

$$q_1^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos \psi$$

$$\alpha = \arcsin \frac{u \sin \psi}{q_1}$$

Quindi la (I) può essere riscritta

$$\begin{aligned} \sigma_{tbr}^L = \frac{(2\pi)^3}{\Delta h_2 h_3} \int \int \delta \left(\vec{q} \frac{\vec{a}_2}{a_2} - \frac{2\pi h_2}{a_2} \right) \delta \left(\vec{q} \frac{\vec{a}_3}{a_3} - \frac{2\pi h_3}{a_3} \right) \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\psi}{\sqrt{\theta^2 q_1^2 - q_2^2}} \Big|_{\psi_3 = \alpha + \arccos \frac{q_2}{\theta q_1}} \end{aligned} \quad (2A)$$

Dopo l'integrazione in ψ_3 , nell'ipotesi che il momento \vec{p}_1 giaccia nel piano \vec{a}_1, \vec{a}_2 , l'argomento delle due funzioni delta diviene

$$\vec{q} \frac{\vec{a}_2}{a_2} - \frac{2\pi h_2}{a_2} \approx \frac{q_2}{\theta} - \frac{2\pi h_2}{a_2}$$

$$\vec{q} \frac{\vec{a}_3}{a_3} - \frac{2\pi h_3}{a_3} = \frac{1}{\theta} \sqrt{q_1^2 \theta^2 - q_2^2} - \frac{2\pi h_3}{a_3}$$

Essendo l'argomento delle due funzioni di Dirac, espresso in termini di q_2 e q_1^2 , è bene nella (2A) esprimere tutto tramite q_2 , q_1^2 e una terza variabile l'integrazione sulla quale si può operare analiticamente.

Procedendo in maniera analoga a quanto ha fatto Übe¹⁴ si ha:

$$\sigma_{abr} = \sum \frac{ak}{h_2 h_3} \frac{Z^2}{E_1^2} \frac{1}{137} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 4N \frac{(2\pi)^2}{\Delta} \int_{0+\frac{q^2}{E_1}}^{\infty} dq_1^2 \int \frac{[1-F(q)]^2}{q^4} \frac{dq_2}{\sqrt{\theta^2 q_1^2 - q_2^2}}$$

$$\cdot \left\{ \delta\left(\frac{q_2}{\theta} - \frac{2\pi h_2}{a_2}\right) \delta\left(\sqrt{q^2 - \frac{q_2^2}{\theta^2}} - \frac{2\pi h_3}{a_3}\right) - \frac{1}{\left(q_2 - \frac{q^2}{2E_1}\right)^2} - \frac{q_2 + q^2 \frac{2(K-E_2)}{2E_1 E_2}}{\left[\left(q_2 - \frac{q^2}{2E_2}\right)^2 + 4q^2\right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1+k\delta)q^2 + 2}{q_2 - \frac{q^2}{2E_1}} \frac{1}{\left[\left(q_2 - \frac{q^2}{2E_2}\right)^2 + 4q^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

L'effetto delle vibrazioni termiche del reticolo spezza la sezione d'urto interferenziale in due parti: una che costituisce parte continua e una la parte interferenziale. Il calcolo della parte continua si ottiene moltiplicando la sezione d'urto differenziale di Bethe e Heitler per il fattore $N [1 - e^{-Aq^2}]$ e integrando sulle variabili angolari. La parte interferenziale si ottiene dalla formula ricavata per il cristallo perfetto moltiplicata per il fattore e^{-Aq^2} . A causa di questo fattore si possono sviluppare le radici considerando i termini del tipo $\frac{q^2}{2E_1}$ piccoli rispetto a q_2 . Si ottengono così le (21) e (22) del paragrafo II B.

Dobbiamo ora specializzare queste formule per un reticolo del tipo del diamante (e silicio).

Il fattore del cristallo è dato da

$$\sum_{\vec{L}} e^{i\vec{q}\vec{L}}$$

dove la somma va estesa a tutti i vettori \vec{L} del reticolo diretto.

La somma può essere fatta su una cella fondamentale e poi sommata sulle celle contenute nel cristallo; si ha quindi

$$\sum_{\vec{L}} e^{i\vec{q}\vec{L}} = \frac{1}{a^3} \sum_{\vec{e}} e^{i\vec{q}\vec{e}}$$

dove \vec{l} è un vettore della cella fondamentale di volume a^3
 La cella fondamentale del diamante è costituita da due cubi
 a facce centrate traslati di

$$\frac{1}{4}a\vec{i} + \frac{1}{4}a\vec{j} + \frac{1}{4}a\vec{k} = \frac{1}{2} \frac{a}{2} (\vec{l} + \vec{j} + \vec{k}) ;$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{e}} e^{i\vec{q}\vec{e}} &= \sum_{\vec{e}}^{fc} e^{i\vec{q}\vec{e}} + \sum_{\vec{e}}^{tc} e^{i\vec{q}(\vec{l} + \frac{1}{2}\frac{a}{2}(\vec{l} + \vec{j} + \vec{k}))} \\ &= \sum_{\vec{e}}^{tc} e^{i\vec{q}\vec{e}} (1 + e^{i\frac{1}{2}\frac{a}{2}(q_x + q_y + q_z)}) \end{aligned}$$

dove \sum^{tc} indica la sommatoria eseguita su un cubo a facce centrate. Il termine $\sum_{\vec{e}}^{tc} e^{i\vec{q}\vec{e}}$ è diverso da zero solo se \vec{q} coincide con un vettore di un reticolo cubico inverso a corpo centrato di lati $(2/a) \cdot 2\pi$, cioè se $q_{x,y,z} = n_{1,2,3} 2\pi \frac{2}{a}$ dove $n_{1,2,3}$ sono numeri interi o, se $n_1 = n_2 = n_3$, interi e semiinteri, ne segue

$$\sum_{\vec{e}} e^{i\vec{q}\vec{e}} = \sum_{\vec{e}}^{tc} e^{i\vec{q}\vec{e}} (1 + e^{i\pi(n_1 + n_2 + n_3)}) \quad (3A)$$

$$= \sum_{\vec{e}}^{tc} e^{i\vec{q}\vec{e}} \begin{cases} (1-1) (a) & n_1 + n_2 + n_3 = 2K + 1 \\ (1+1) (b) & n_1 + n_2 + n_3 = 2K \\ (i \pm i) (c) & n_1 + n_2 + n_3 = 3 \frac{2K+1}{2} \end{cases}$$

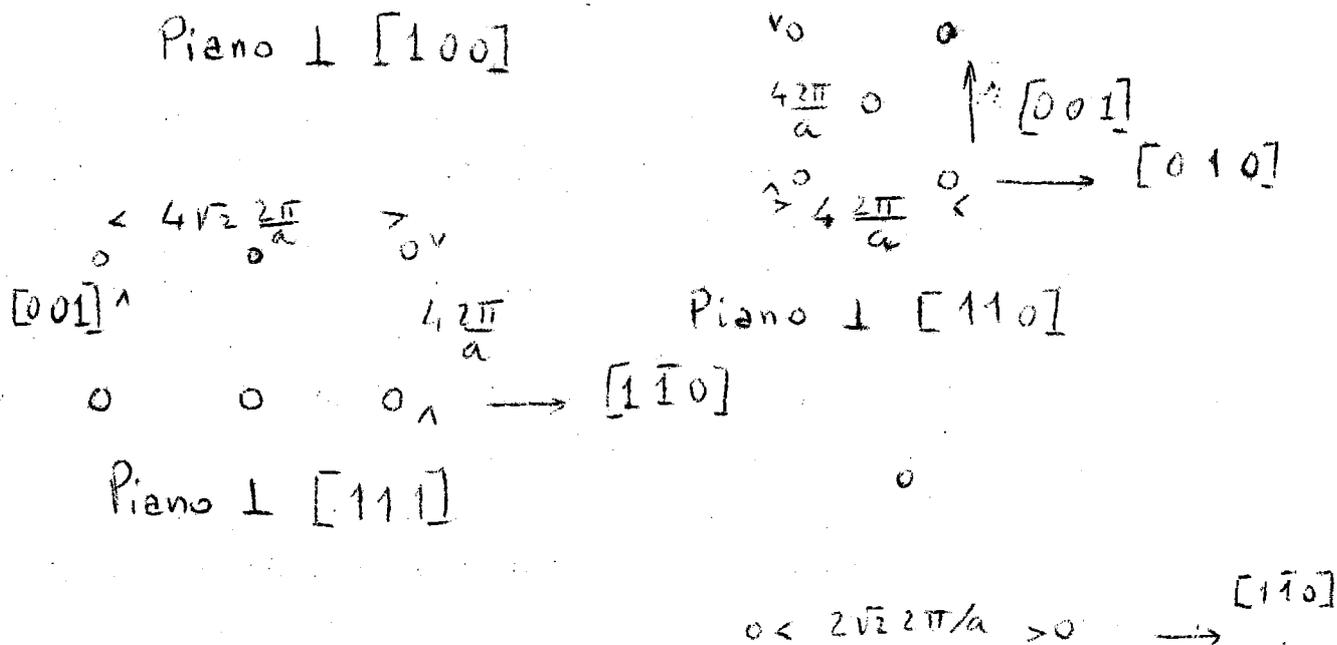
Quindi il fattore del cristallo per il diamante è diverso da zero quando \vec{q} coincide con i punti di un reticolo cubico a corpo centrato e per i quali

$$n_1 + n_2 + n_3 = \begin{cases} 2h \\ 3 \frac{(2h+1)}{2} \end{cases}$$

con i fattori indicati nella (3A).

Se nella (3A) consideriamo solo il piano $h_1 = 0$ nelle sommatorie non si incontrano n_i semiinteri e rimane quindi solo il caso b).

Se costruiamo i reticoli dei piani normali agli assi $[111]$ $[100]$ $[110]$ per il diamante (o silicio) troviamo la seguente situazione:



Ad esempio se sul piano normale all'asse $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$ riferiamo i punti del reticolo a due assi normali $(\bar{1}\bar{1}0)$ $(\bar{1}\bar{1}\bar{2})$ la (2I) del par. II.B diviene la (23) o la (25), dove si è tenuto conto della struttura a diamante prendendo come lunghezze fondamentali quelle indicate negli schemi che precedono e moltiplicando il quadrato del fattore del cristallo calcolato su un reticolo a corpo centrato per 4 per tenere conto del quadrato proveniente da (b) nella (3A).

Ringraziamenti

Durante parte di questo lavoro ha dato la sua preziosa collaborazione al nostro gruppo il Prof. J. De Wire della Cornell University, al quale va la nostra più sentita riconoscenza.

Molto utile ci è stata l'attiva collaborazione del Dr. B. Antonini durante la sua tesi di laurea; a lui rivolgiamo un particolare ringraziamento.

Il goniometro che ci ha permesso di ottenere una notevole precisione nelle misure è stato progettato dal Sig. G. Di Stefano e costruito dai Sigg. M. Bonini e G. Di Stefano ai quali pertanto rivolgiamo il nostro apprezzamento per l'ottimo lavoro. La grande quantità di calcoli numerici

che ci sono stati necessari è stata affrontata con grande abnegazione dal gruppo Calcoli Numerici dei Laboratori di Frascati sotto la direzione del Dr. A. Turrin, al quale chiediamo scusa di alcune nostre eccessive pretese. I monocristalli sono stati analizzati ai raggi X dal Dr. F. Sgarlata dell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Roma, che desideriamo ringraziare.

Infine siamo riconoscenti a tutto il personale del gruppo macchina e al suo direttore Dr. G. Ghigo, che ci ha assiduamente assistito in tutto lo svolgimento del nostro lavoro.

BIBLIOGRAFIA

- I - E.J. Williams, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat - Fys. Medd. 13, 4 (1935)
- 2 - B. Ferretti, Nuovo Cimento 7, 118 (1950)
- 3 - M.L. Ter - Mikaelyan, Zhur. Eksp. i Teoret. Fiz 25, 296 (1953).
- 4 - H. ["]Uberall, Phys. Rev. 103, 1055 (1956).
- 5 - H. ["]Uberall, Phys. Rev. 107, 223 (1957)
- 6 - O.R. Frisch and D.H. Olson, Phys. Rev. Letters 3, 141 (1959).
- 7 - W.K.H. Panofsky and A.N. Saxena, Phys. Rev. Letters 2, 219 (1959)
- 8 - A.N. Saxena, Phys. Rev. Letters 4, 311 (1960); Phys. Rev. (to be published)
- 9 - G. Bologna, G. Diambriini and G.P. Murtas, Phys. Rev. Letters 4, 134 (1960)
- 10 - G. Bologna, G. Diambriini and G.P. Murtas, Phys. Rev. Letters 4, 572 (1960)
- 11 - L. Schiff, Phys. Rev. 117, 1394 (1960)
- 12 - P.R. Auvil, and L. Schiff, Bull. Am. Phys. Soc. 6, 109 (1961).
- 13 - H.A. Bethe, and W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London A146, 83 (1934).
- 14 - H.A. Bethe, Proc. Cambridge Phil. Soc. 30, 524 (1934)
- 15 - P.P. Ewald, Handbuch der Physik (Verlag Julius Springer Berlin, 1933) Part 2, vol. 23.
- 16 - L.I. Schiff, Phys. Rev. 83, 252 (1951).
- 17 - E. Jahnke and D. Emde, Tables of functions (Dover Publications, New York 1948).
- 18 - Tables of the error function and its derivative (National Bureau of Standard, Washington, 1954).
- 19 - J.A. Wheeler and W.E. Lamb, Phys. Rev. 55, 858 (1939); 101, 1836 (1955)
- 20 - G. Bologna, G. Diambriini, R. Toschi, A.S. Figuera, U. Pellegrini, B. Rispoli, A. Serra, Nucl. Instr. 12, 263 (1961)
- 21 - G. Bologna, G. Diambriini, G.P. Murtas, Nuovo Cimento (Suppl.), in corso di stampa.
- 22 - H. ["]Uberall, CERN Report 58-21, September 1958 (non pubblicato)
- 23 - G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambriini, G.P. Murtas, Phys. Rev. Letters, Febbraio 1962.

DIDASCALIE DELLE FIGURE

FIG. 1 - Il disco luogo degli estremi degli impulsi trasferiti ai nuclei rappresentato nello spazio del reticolo inverso.

FIG. 2 - Contributo continuo alla sezione d'urto ($\gamma_{1,2}^c$) e somma del contributo continuo e di quello interferenziale per $\theta = 0$ e per i piani $h_1 \neq 0$

$$\left(\gamma_{1,2}^c + \sum_h \gamma_{1,2}^h (\theta = 0) \right)$$

calcolati dalle (8), (13) per monocristalli a temperatura $T = 293^\circ\text{K}$. Sono rappresentate anche le funzioni di Bethe e Heitler (cfr. le (14), per atomi isolati (curve indicate con BH) e le funzioni di Wheeler e Lamb (cfr. le (15) e (16)) che danno il contributo degli elettroni alla sezione d'urto (curve indicate con WL).

Le curve continue si riferiscono all'indice 1 mentre quelle tratteggiate si riferiscono all'indice 2. Le funzioni sono rappresentate sia in funzione del minimo impulso trasferito al nucleo δ , sia in funzione del parametro μ (minimo impulso trasferito in unità del passo reticolare inverso).

- a) Caso del silicio orientato con l'asse $[111]$ ad angolo $\theta = 0$ con la particella primaria (passo reticolare a $[111] = (\sqrt{3}/2) a [100]$ a $[100]$ dato in tab. I; $\mu = (\sqrt{3}/2)(a [100] / 2\pi) \delta$).
- b) Caso del diamante orientato con l'asse $[100]$ ad angolo $\theta = 0$ con la particella primaria (passo reticolare a $[100]$ dato in tab. I - $\mu = (a [100] / 2\pi) \delta$).

FIG. 3 - Contributo interferenziale alla sezione d'urto dovuto al piano $h_1 = 0$. Sono rappresentate le funzioni (18) $\chi_{1,2}^o(\tau) = \mu \gamma_{1,2}^o(\theta, \delta)$, calcolate in approssimazione di Uberall mediante le (12) per monocristalli a temperatura $T = 293^\circ\text{K}$, in funzione di $\tau = \theta/\delta$.

Le curve continue si riferiscono al silicio mentre quelle tratteggiate si riferiscono al diamante.

FIG. 4 - Contributo interferenziale alla sezione d'urto dovuto al piano $h_1 = 0$. Sono rappresentate in funzione di $\tau = \theta/\delta$ le funzioni $\chi_{1,2}^{o*}(\tau)$ date dalle (27) e (30), da noi ottenute tenendo conto della reale distribuzione dei punti nel reticolo inverso; è riportata per confronto anche la funzione $\chi_{1,2}^o(\tau)$ (18) ottenuta in approssimazione di Uberall (cfr. fig. 3).

La curva continua rappresenta $\chi_{1,2}^{o*}$, quella tratteggiata $\chi_{1,2}^o$ e quella a tratto e punto $\chi_{1,2}^o$.

- a) Caso del silicio con l'asse $[III]$ formante l'angolo θ con l'impulso del primario nel piano dell'asse $[III]$ e $[IOI]$. $\chi_{1,2}^{o*}(\tau) = (\sqrt{3}/2)(a/2\pi)\delta\psi_{1,2}^{o*}$ sono date dalle (23) ed a è dato in tab. I.
- b) Caso del silicio con l'asse $[III]$ formante l'angolo θ con l'impulso del primario nel piano degli assi $[III]$ e $[11\bar{2}]$. $\chi_{1,2}^{o*}(\tau) = (\sqrt{3}/2)(a/2\pi)\delta\psi_{1,2}^{o*}$ sono date dalle (25).
- c) Caso del diamante con l'asse $[II\bar{O}]$ formante l'angolo θ con l'impulso del primario nel piano degli assi $[II\bar{O}]$ e $[001]$. $\chi_{1,2}^{o*}(\tau) = (\sqrt{3}/2)(a/2\pi)\delta\psi_{1,2}^{o*}$ sono date dalle (28).

FIG. 5 - Disposizione sperimentale. Le distanze sono espresse in m. R radiatore - C₁, C₂, C₃ collimatori - B magnete pulitore - S spettrometro a coppie - P convertitore - A₁, A₂, A₃ scintillatori - Q quantametro.

FIG. 6 - Schema a blocchi dell'apparecchiatura elettronica A₁, A₂, A₃. Fotomoltiplicatori - C_p coincidenza tripla simultanea - L linee di ritardo - C_d coincidenza tripla ritardata - A amplificatori rapidi - D discriminatori - G circuito di gate - S₁ scale rapide - S₂ scale lente - P peaker - R generatore di impulsi rettangolari - Q quantametro - I integratore - N predispositore dosi.

FIG. 7 - Dispositivo goniometrico per la rotazione del monocristallo attorno ad un asse orizzontale ed uno verticale nella sezione diritta della camera a vuoto del sincrotrone, usato per lo studio delle proprietà interferenziali della bremsstrahlung.

FIG. 8 - Variazione relativa della sezione d'urto per produzione di coppie simmetriche in un monocristallo di silicio a temperatura T = 293°K orientato con l'asse cristallino $[100]$ all'angolo θ col fascio di fotoni.

L'energia (equipartita) degli elettroni è $E_{\pm} = 455 \pm 30$ MeV.

La curva continua rappresenta la quantità ξ_t (32) rappresentata in funzione di θ per $k = E_- + E_+ = 910 \pm 60$ MeV; mentre la retta tratteggiata rappresenta la differenza percentuale fra la sezione d'urto per atomi isolati (Bethe-Heitler + Wheeler e Lamb) e quella del cristallo per $\theta = 0$.

I punti sperimentali rappresentano la quantità ξ_s (33); l'errore statistico è $\Delta \xi_s = \pm 0.7\%$ ed è indicato per alcuni punti della figura. I diversi simboli sperimentali indicano i vari turni di misura e sono indicati nella leggenda della figura. La riproducibilità in θ è $\delta \theta = \pm 0.5$ mrad.

- a) rotazione dell'angolo θ in un piano verticale
 b) rotazione dell'angolo θ in un piano orizzontale.

FIG. 9 - Variazione relativa fra $\theta = 60$ mrad e $\theta = 0$ della sezione d'urto per produzione di coppie simmetriche in un monocristallo di silicio a temperatura $T = 293^\circ\text{K}$, (θ angolo fra l'asse cristallino $[100]$ e il fascio di fotoni). In ascissa è riportata l'energia k dei fotoni (equipartita fra gli elettroni); lo spread dell'energia dei fotoni è $\Delta k/k = \pm 8,5\%$. La curva continua rappresenta la quantità S_t (32) calcolata in funzione di k fra $\theta = 60$ mrad e $\theta = 0$. I punti sperimentali rappresentano la quantità S_s (34); l'errore statistico è $\Delta S_s = \pm 0,7\%$ ed è indicato per alcuni punti della figura.

FIG. 10 - Intensità della bremsstrahlung prodotta in un monocristallo di silicio a temperatura $T = 293^\circ\text{K}$, in funzione dell'angolo θ fra l'asse $[111]$ e l'elettrone primario, relativamente all'energia k dei fotoni. La curva continua rappresenta la quantità R_t (37) ottenuta in approssimazione di Uberall, tenendo anche conto dell'influenza degli elettroni atomici.

I punti sperimentali rappresentano la quantità R_s (36). L'errore statistico è $\Delta R_s = \pm 2 \cdot 10^{-2} R_s$, mentre la riproducibilità in θ è $\delta\theta = \pm 0,5$ mrad.
 a) $k = 80$ MeV, $k_0 = 865$ MeV
 b) $k = 240$ MeV, $k_0 = 910$ MeV

FIG. 11 - Numero di coppie simmetriche $N(\theta, k)$ per unità di dose rivelate in funzione dell'angolo θ fra la direzione dell'elettrone primario e l'asse $[111]$ del monocristallo di silicio, per un'energia $k = 100$ MeV dei fotoni rivelati. L'errore statistico è segnato per alcuni punti della figura; la riproducibilità in θ è $\delta\theta = \pm 0,1$ mrad.

FIG. 12 - Intensità della bremsstrahlung prodotta in un monocristallo di silicio a temperatura $T = 293^\circ\text{K}$, in funzione dell'angolo θ fra l'asse $[111]$ e l'impulso dell'elettrone primario contenuto nel piano degli assi $[111]$ e $[112]$. È rappresentata la funzione $R(\theta, k) = I(\theta, k) / I(\theta, k_0)$ data dalla (35), che tiene conto anche degli elettroni atomici, per le energie del fotone $k = 100$ MeV, $k_0 = 850$ MeV. $I(\theta, k)$ è stata da noi calcolata tenendo conto della reale distribuzione dei punti del reticolo inverso sul piano $h_l = 0$, medianamente (25) (cfr. fig. 4b).

I punti sperimentali rappresentano la quantità $R_s(\vartheta, k)$ dati dalla (36). L'errore statistico è $\Delta R_s \leq \pm 2 \cdot 10^{-2} R_s$, ed è indicato per alcuni punti della figura, mentre la riproducibilità in ϑ è $\Delta \vartheta = \pm 0,1$ mrad.

FIG. I2 bis - (Aggiunta dopo la stampa del testo).

Lo stesso di fig. I2, ma con $k = 230$, $k_0 = 865$ MeV; inoltre l'impulso dell'elettrone primario appartiene, al piano degli assi [III], [IOI]; quindi si è fatto uso delle (23) e dei risultati di fig. 4a.

Si vede che i massimi sperimentali estremi si hanno per $|\vartheta| = 115$ mrad, cioè per il valore che in base alla prima delle (24) corrisponde alla distanza $2\sqrt{a}$ ($2\pi/a$), cioè proprio la distanza fra due punti consecutivi del reticolo inverso lungo l'asse [IOI]. Da ciò risulta confermata la appartenenza di \vec{p}_0 al piano degli assi citati e quindi la legittimità di usare le (23).

FIG. I3

- Intensità della bremsstrahlung prodotta in un monocristallo di silicio a temperatura $T = 293^\circ\text{K}$ in funzione dell'energia frazionaria del fotone $x = k/E_0$, $E_0 = 10$ GeV. Le curve continue rappresentano la funzione $I(x, \vartheta)$ (35) che tiene conto anche degli elettroni atomici. La funzione $I_n(x, \vartheta)$ è stata calcolata in approssimazione di Überall mediante le (12).

I punti sperimentali rappresentano la quantità (38). I circoletti sono relativi al valore $\vartheta = 1 \pm 0,5$ mrad dell'angolo compreso fra l'asse [III] e la direzione dell'elettrone incidente, mentre le crocette sono relative a $\vartheta = 6 \pm 0,5$ mrad. L'intervallo di energia dei fotoni accettando dalla misura è $\Delta k/k = \pm 8,5\%$; l'errore statistico è di $\pm 2\%$ ed è indicato per alcuni punti della figura.

FIG. I4

- Intensità della bremsstrahlung di elettroni di $E_0 = 6$ GeV in un monocristallo di diamante a temperatura $T = 293^\circ\text{K}$. È rappresentata la funzione $I_n(k, \vartheta)$ data dalle (7), in funzione dell'energia k dei fotoni, per il valore $\vartheta = 0,31$ mrad dell'angolo compreso fra l'asse [III] e l'impulso dell'elettrone primario, appartenente al piano degli assi [IIO] e [OOI]. Il calcolo è stato eseguito tenendo conto delle (28).

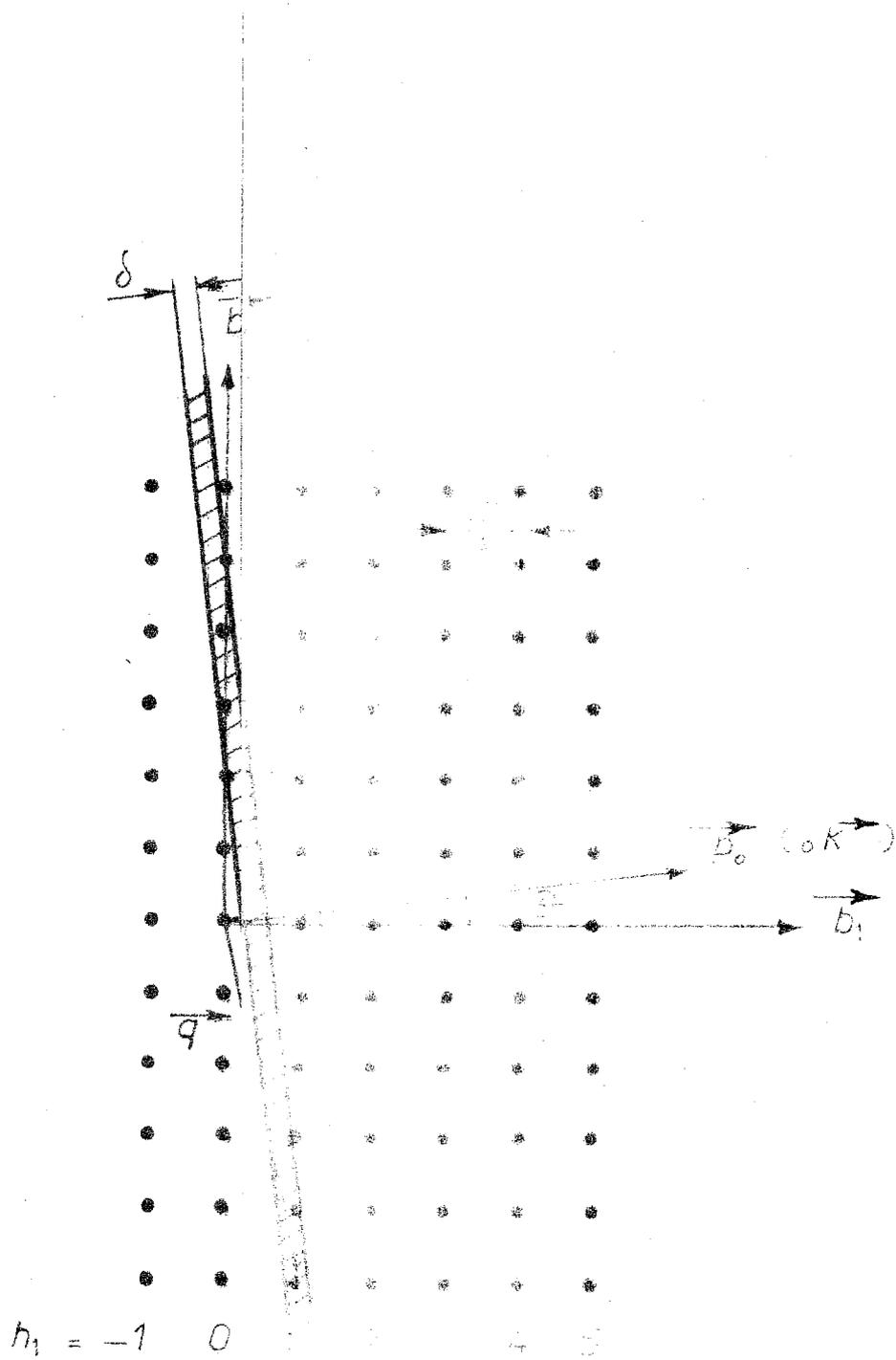


Fig. 1

Silicio [111]

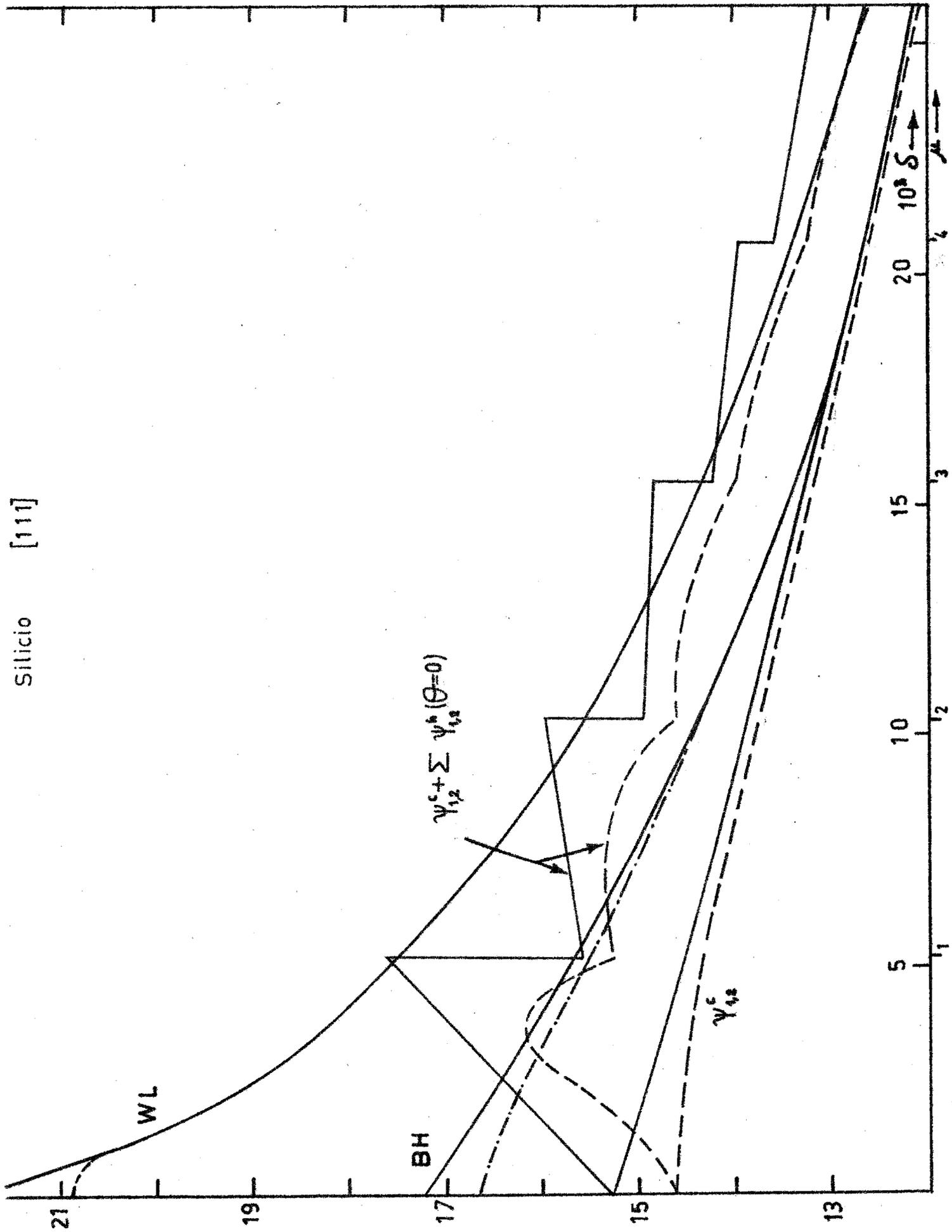
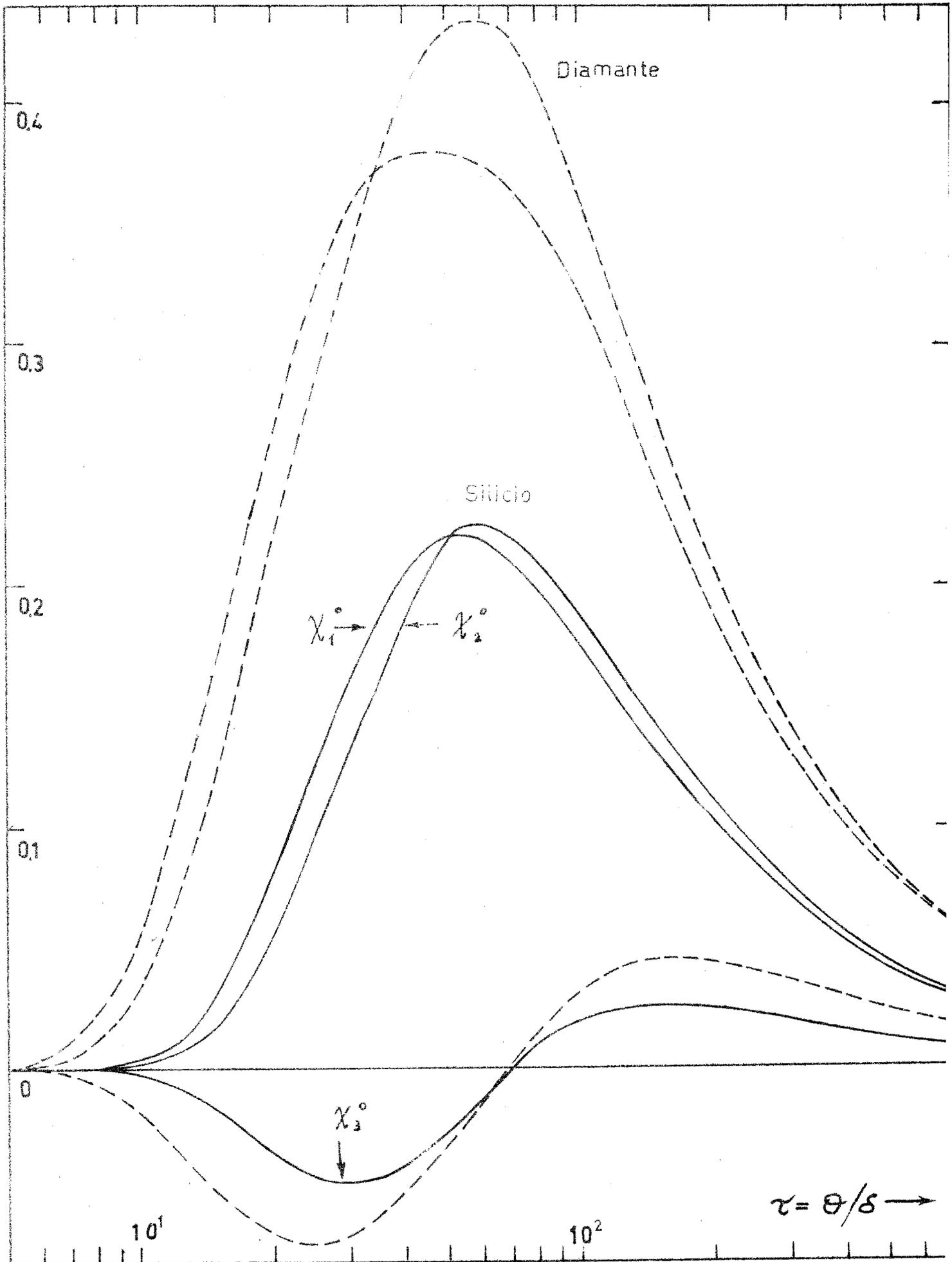


Fig. 2a.



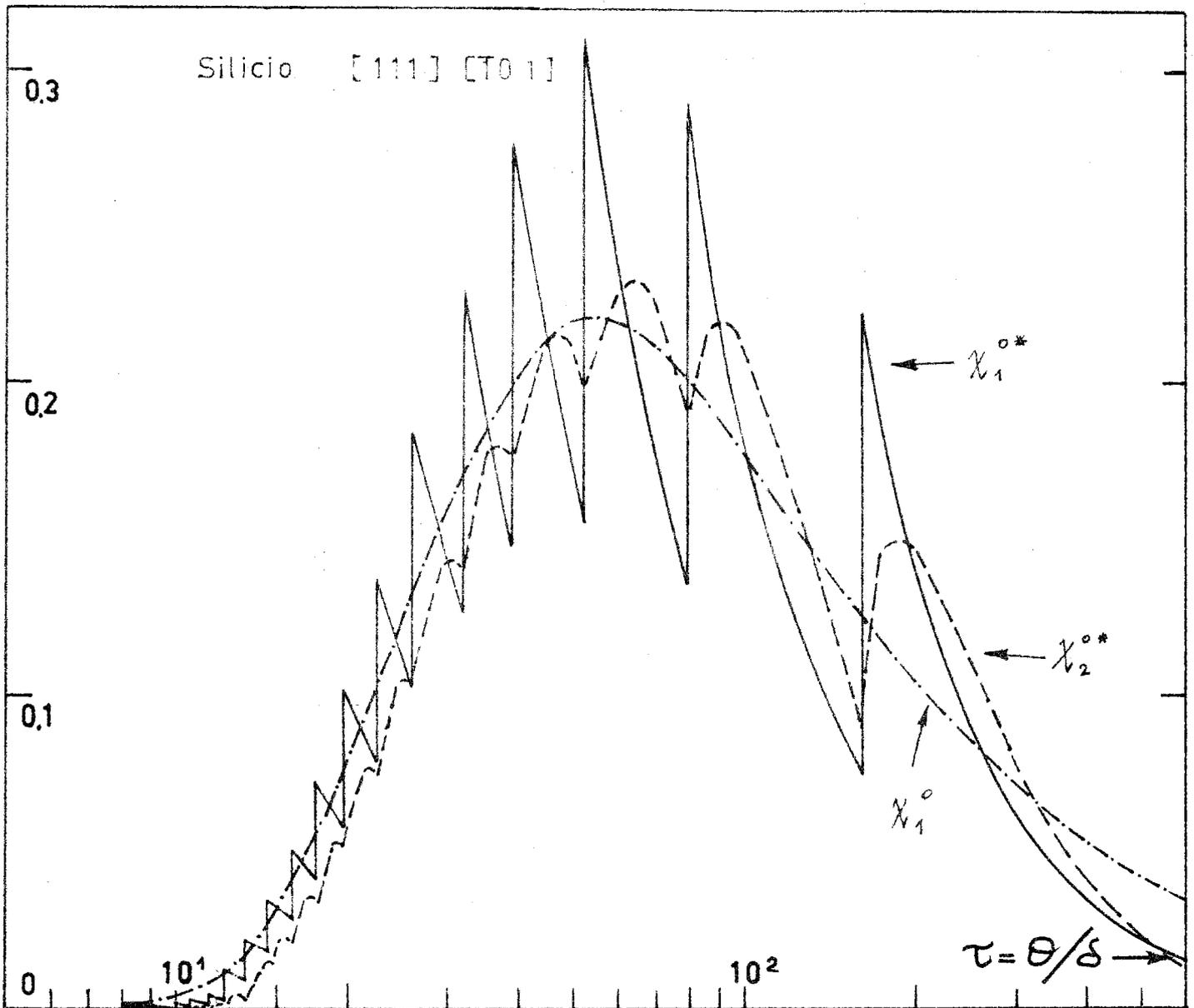


Fig. 4a

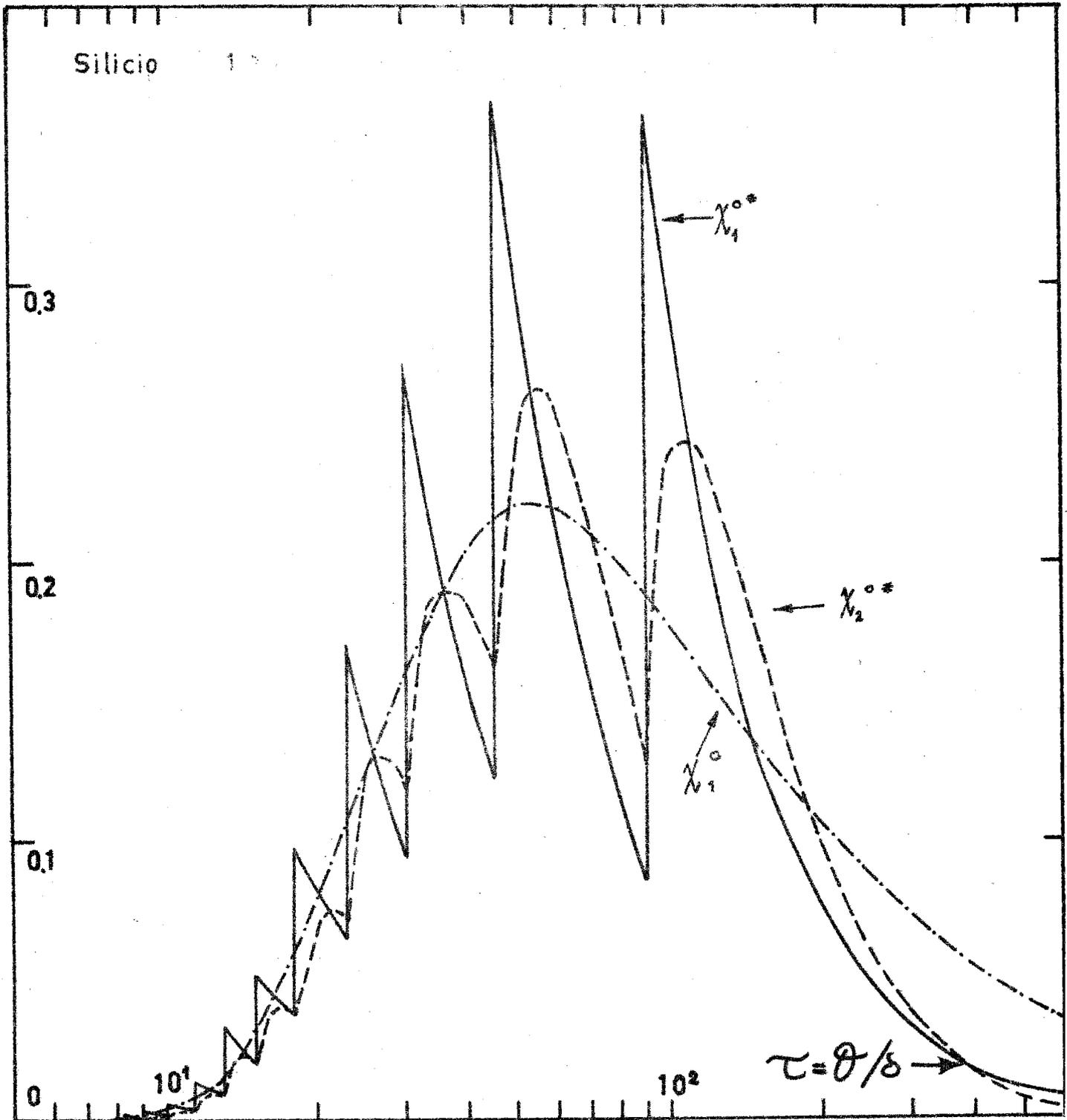
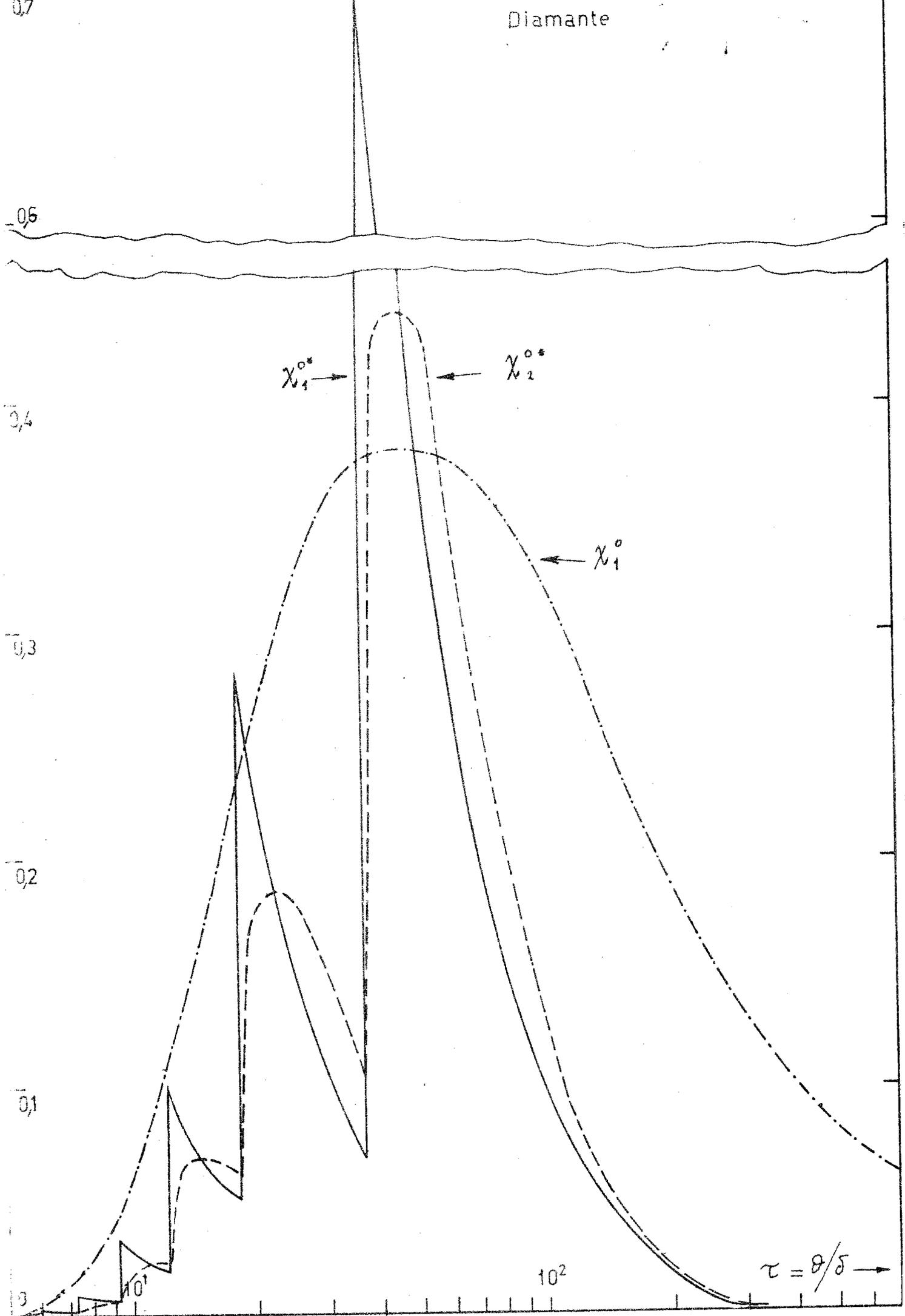


fig. 4b

Diamante



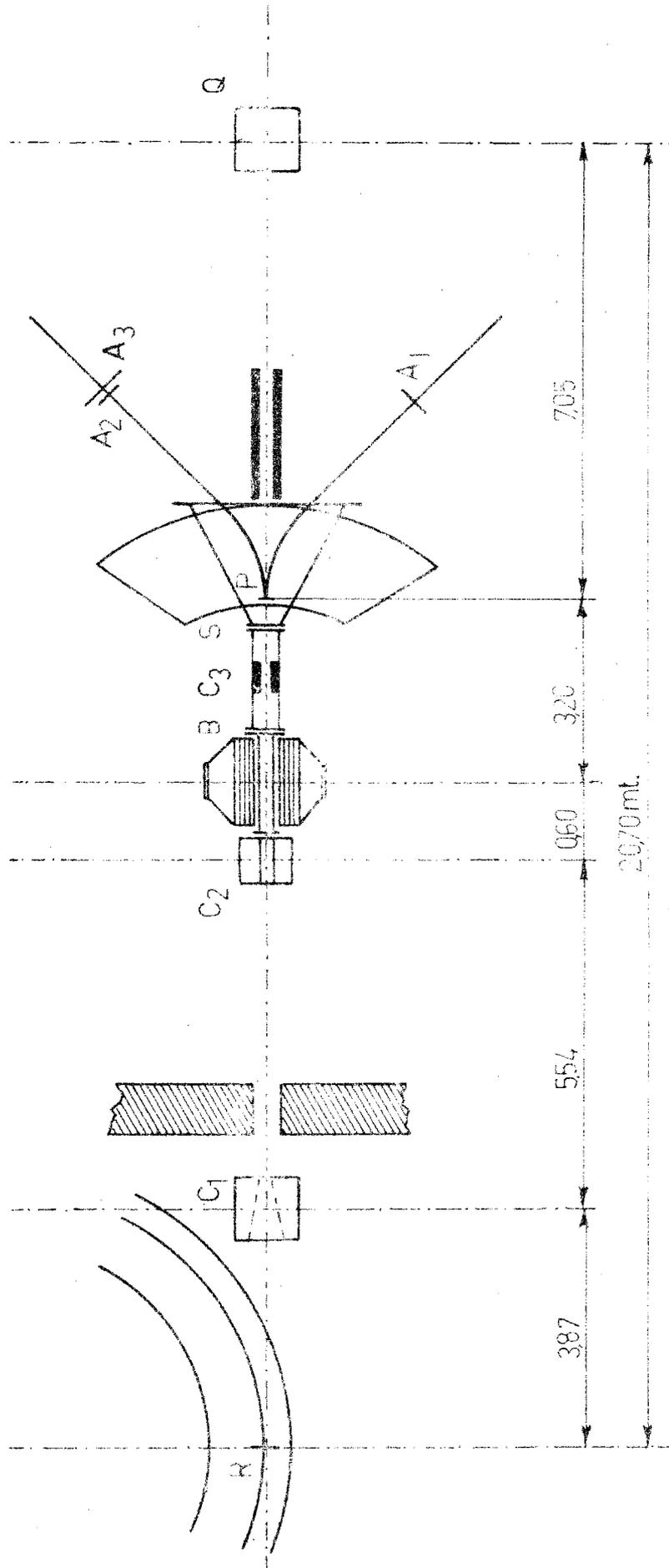


FIG. 5

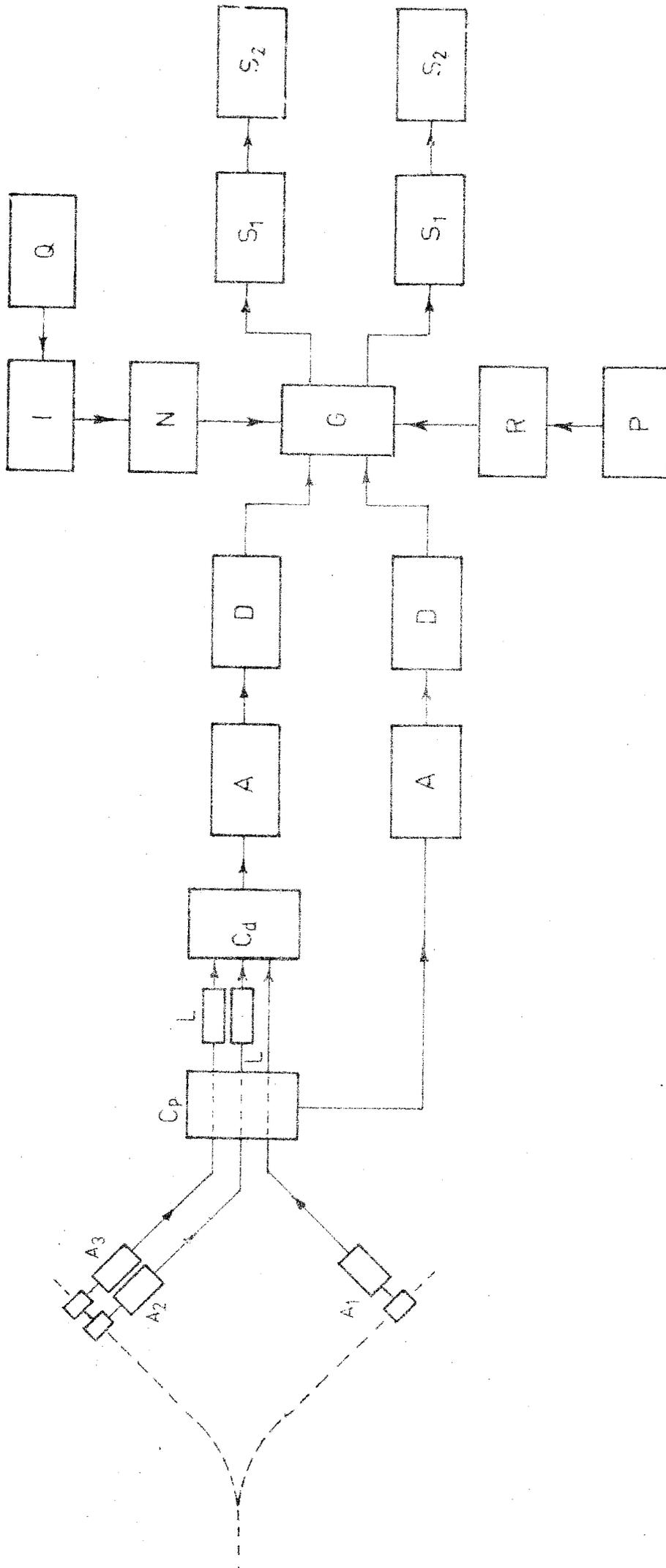


FIG. 6

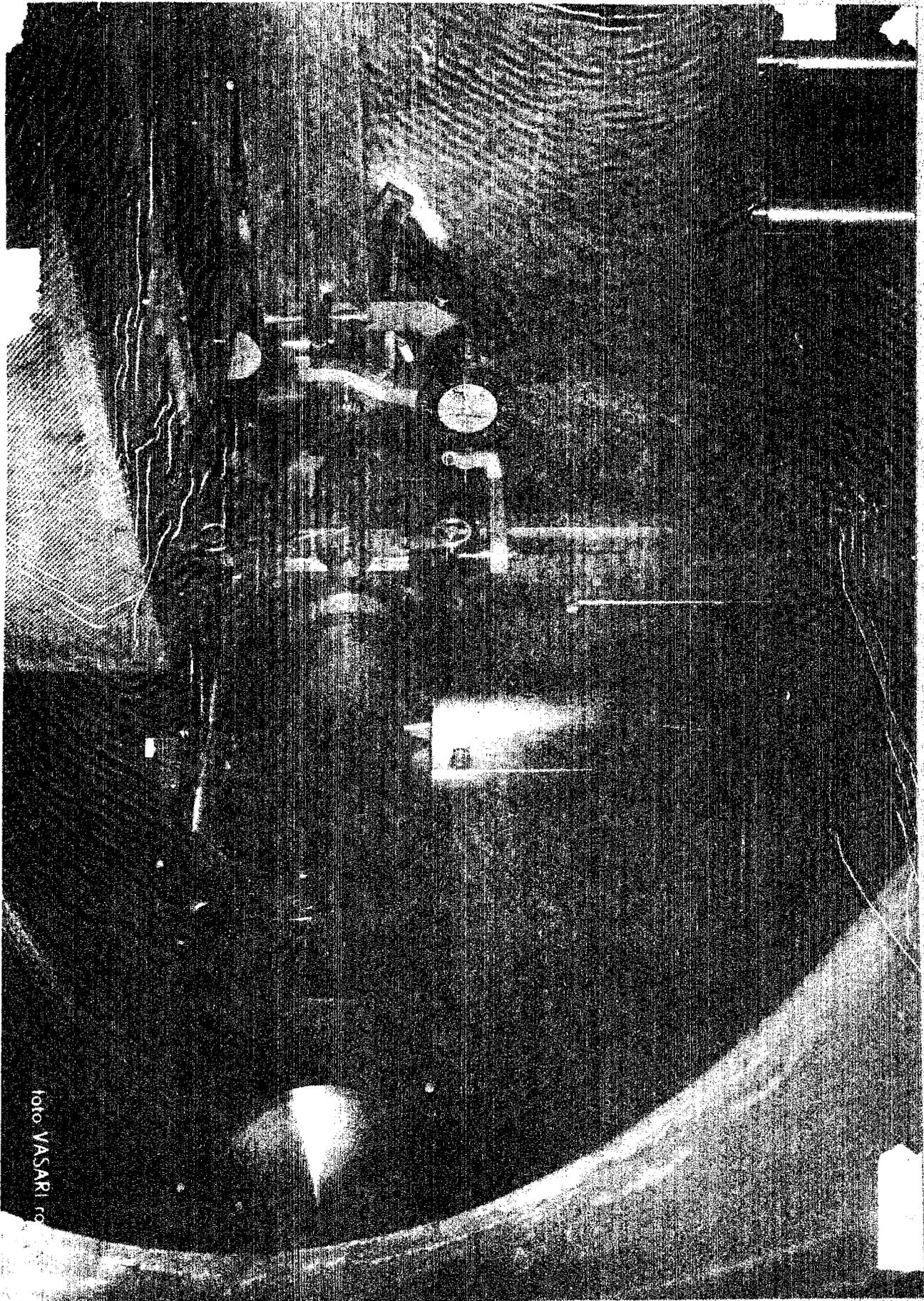
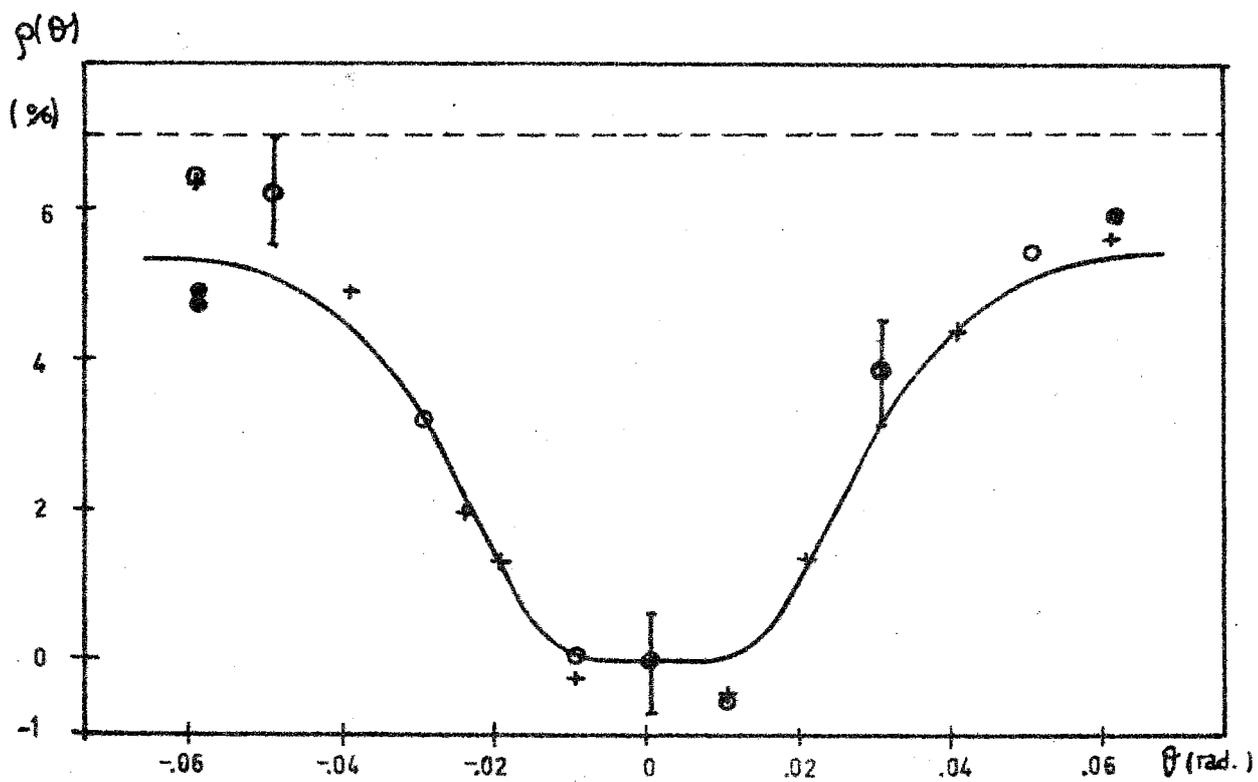


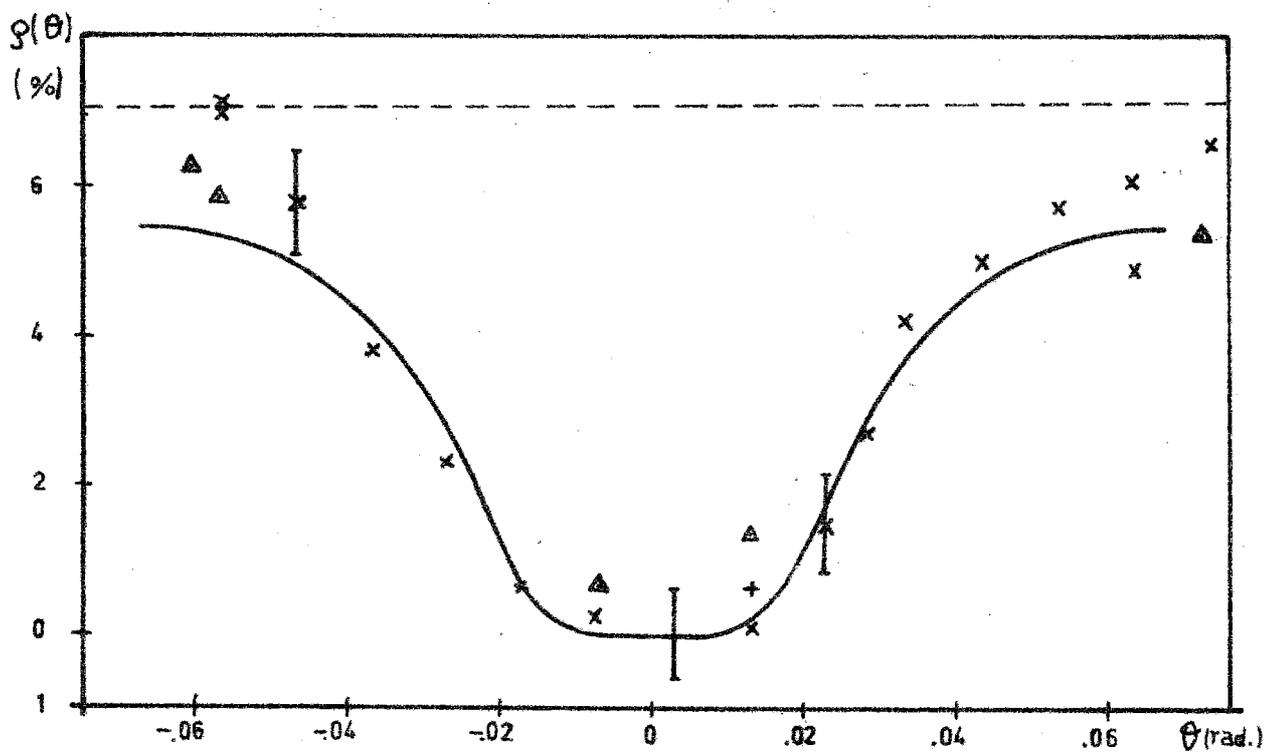
Foto VASARI

FIG. 7



a)

o 1° turno ● 2° turno + 3° turno x 4° turno ▲ 5° turno



b)

Fig. 8

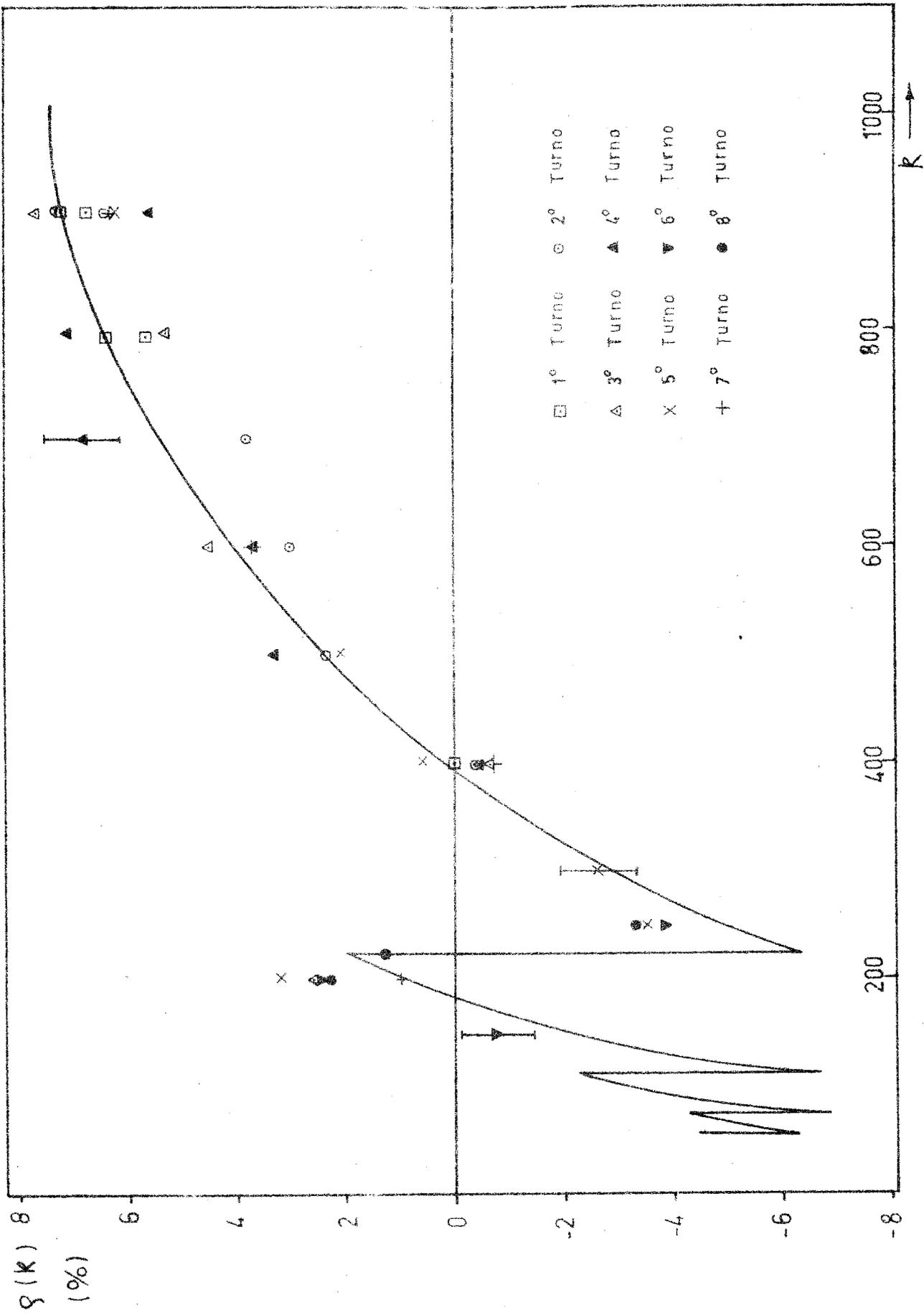
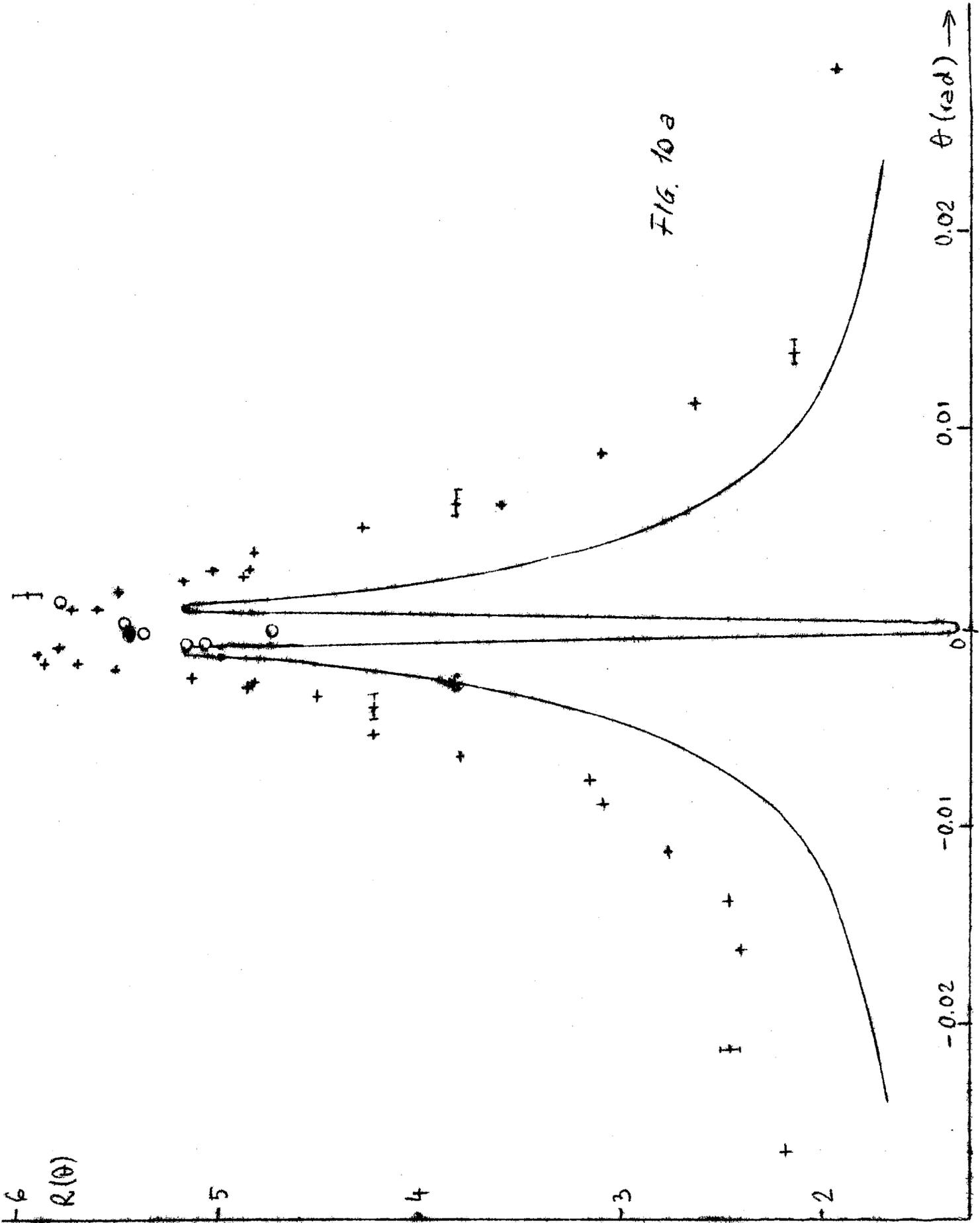


FIG. 9



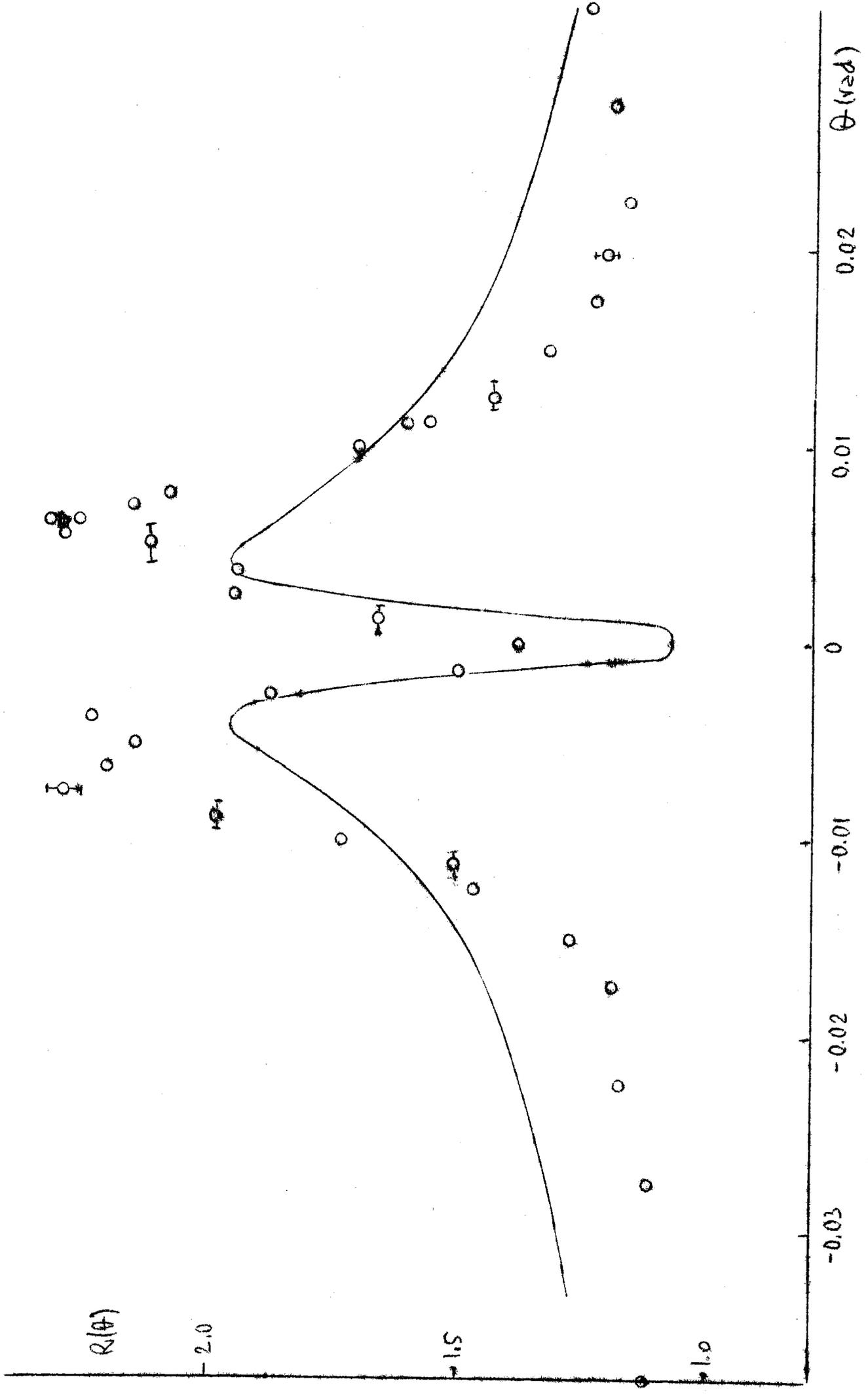


FIG. 10 b

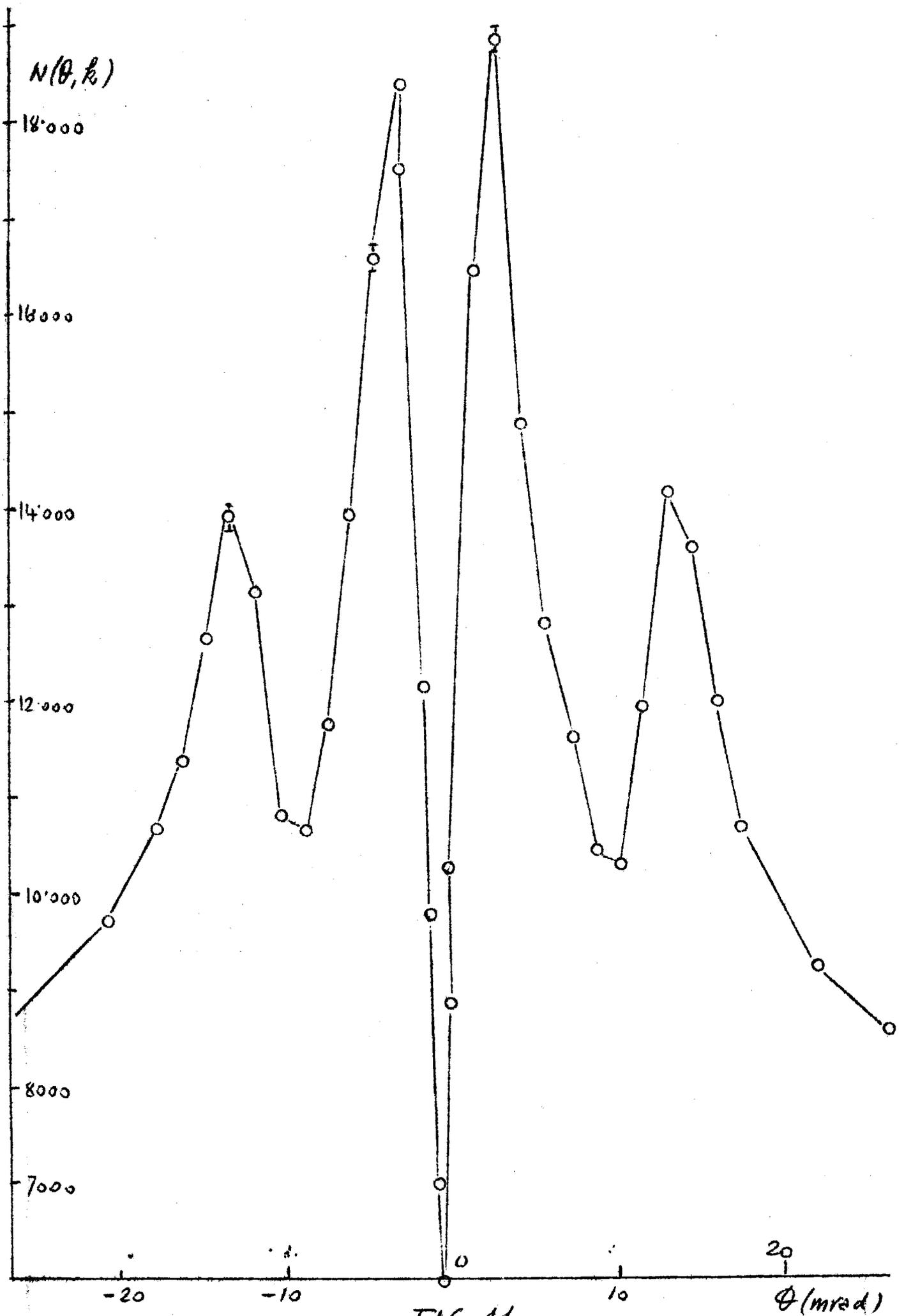


FIG. 11

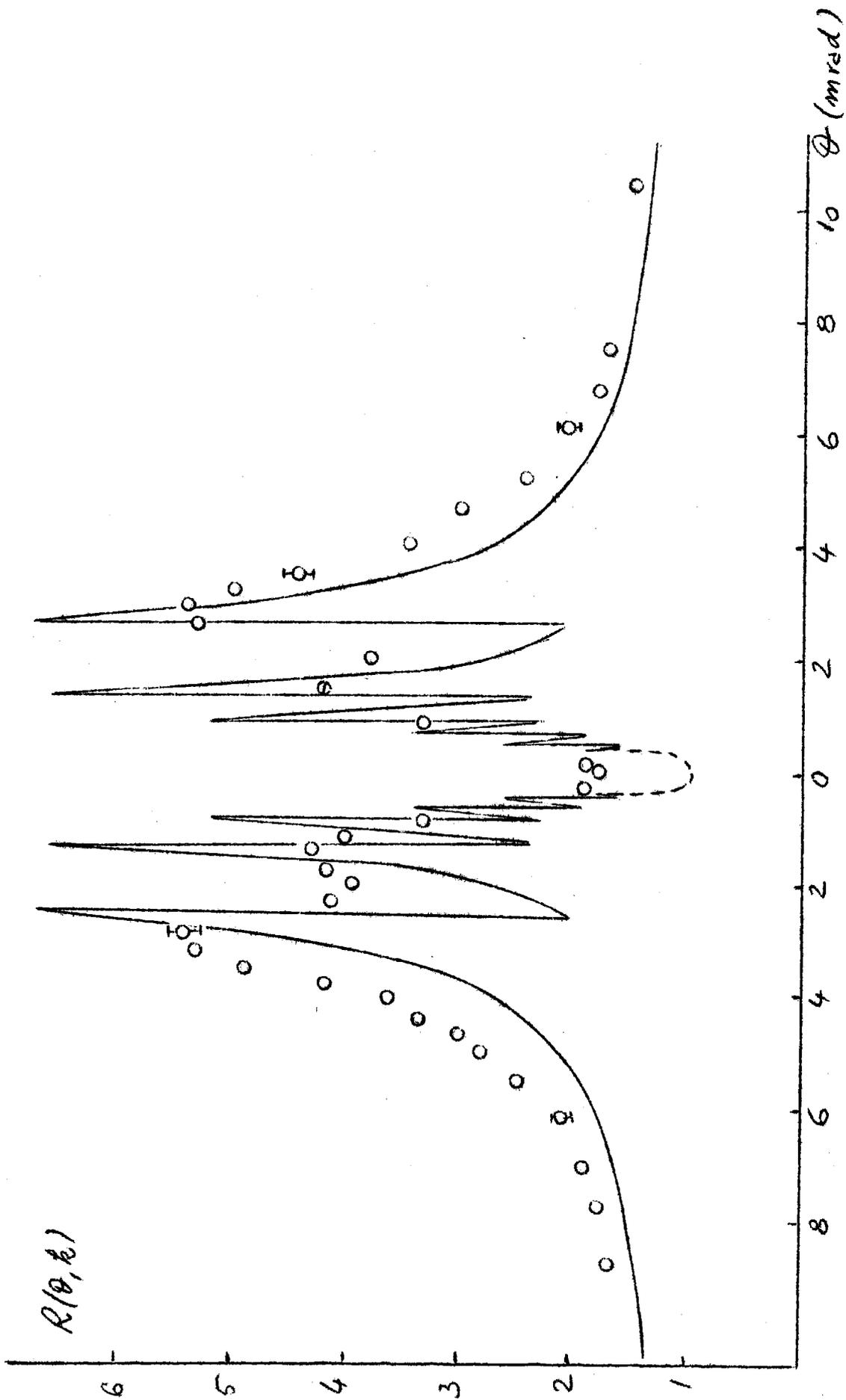


FIG. 12

$R(\theta_k)$

θ (in rad.)

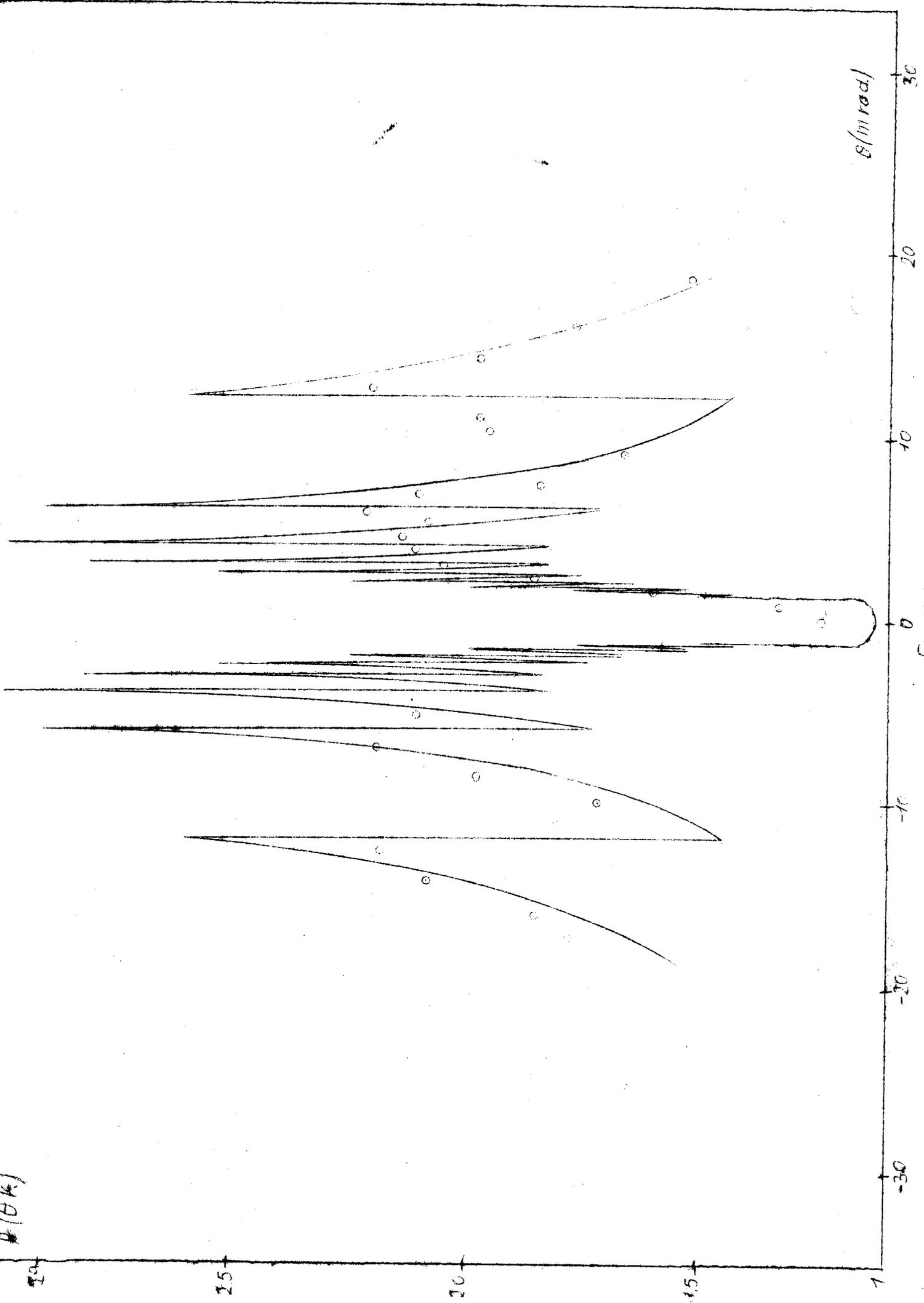
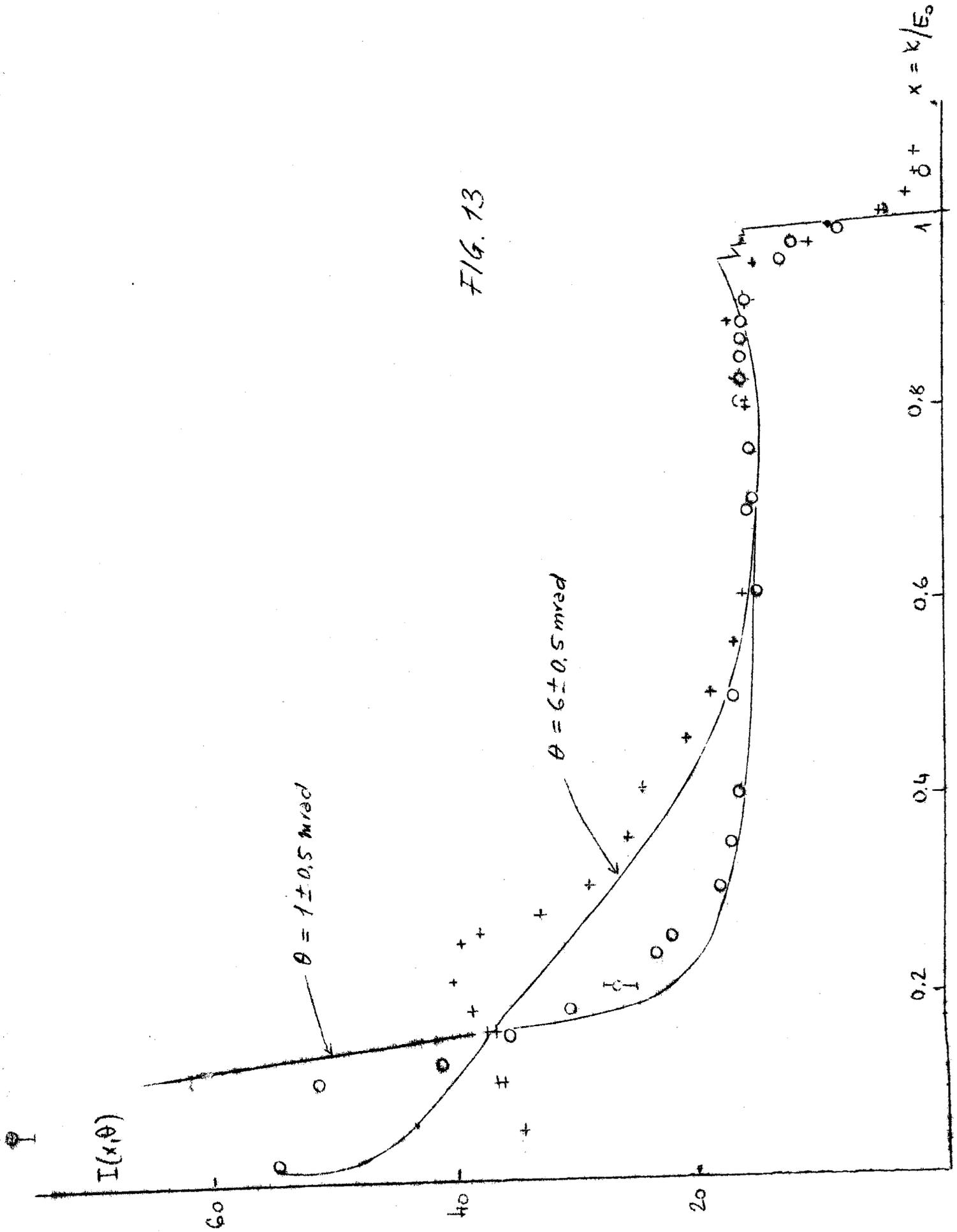


FIG. 12 hr

FIG. 13



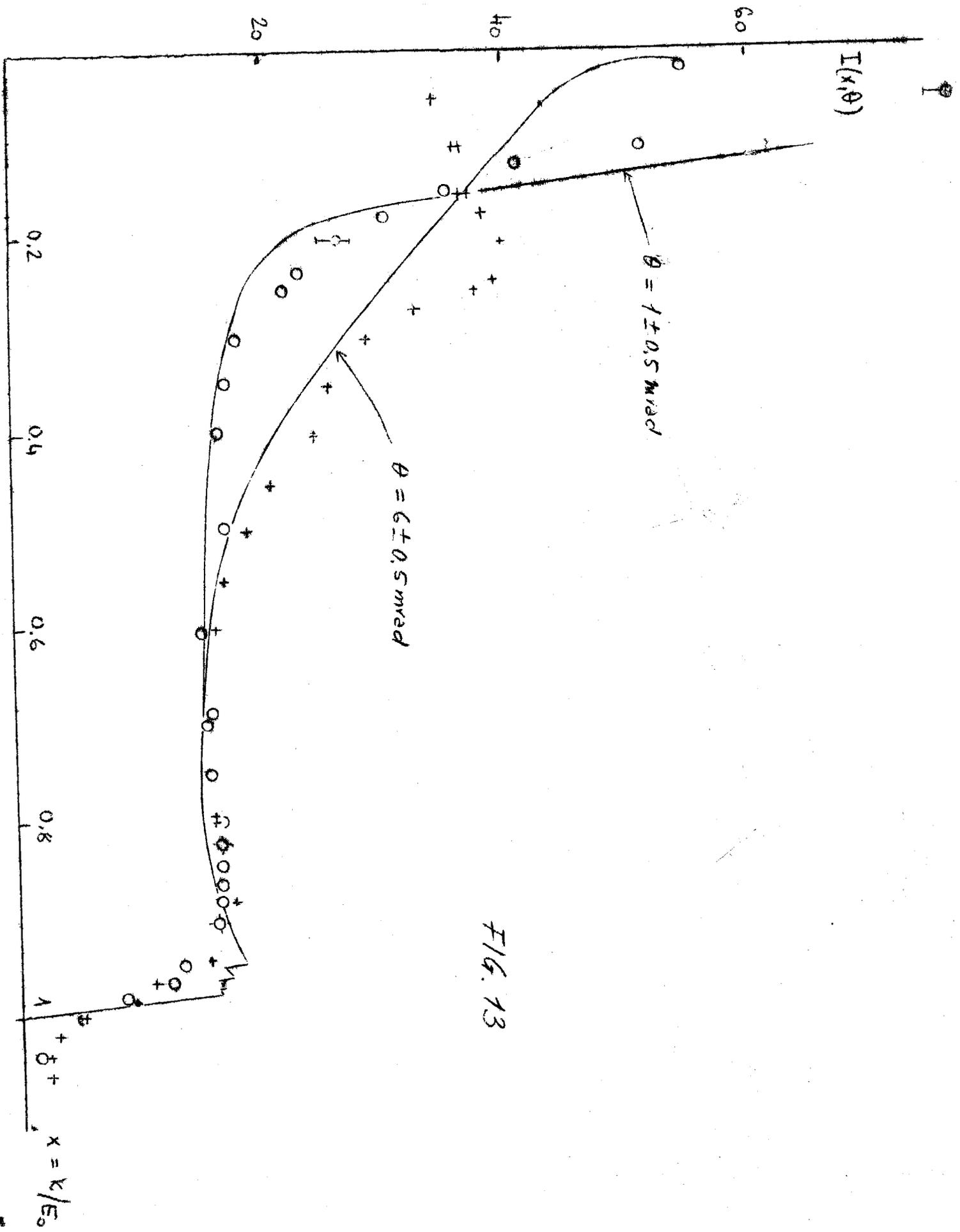


FIG. 13

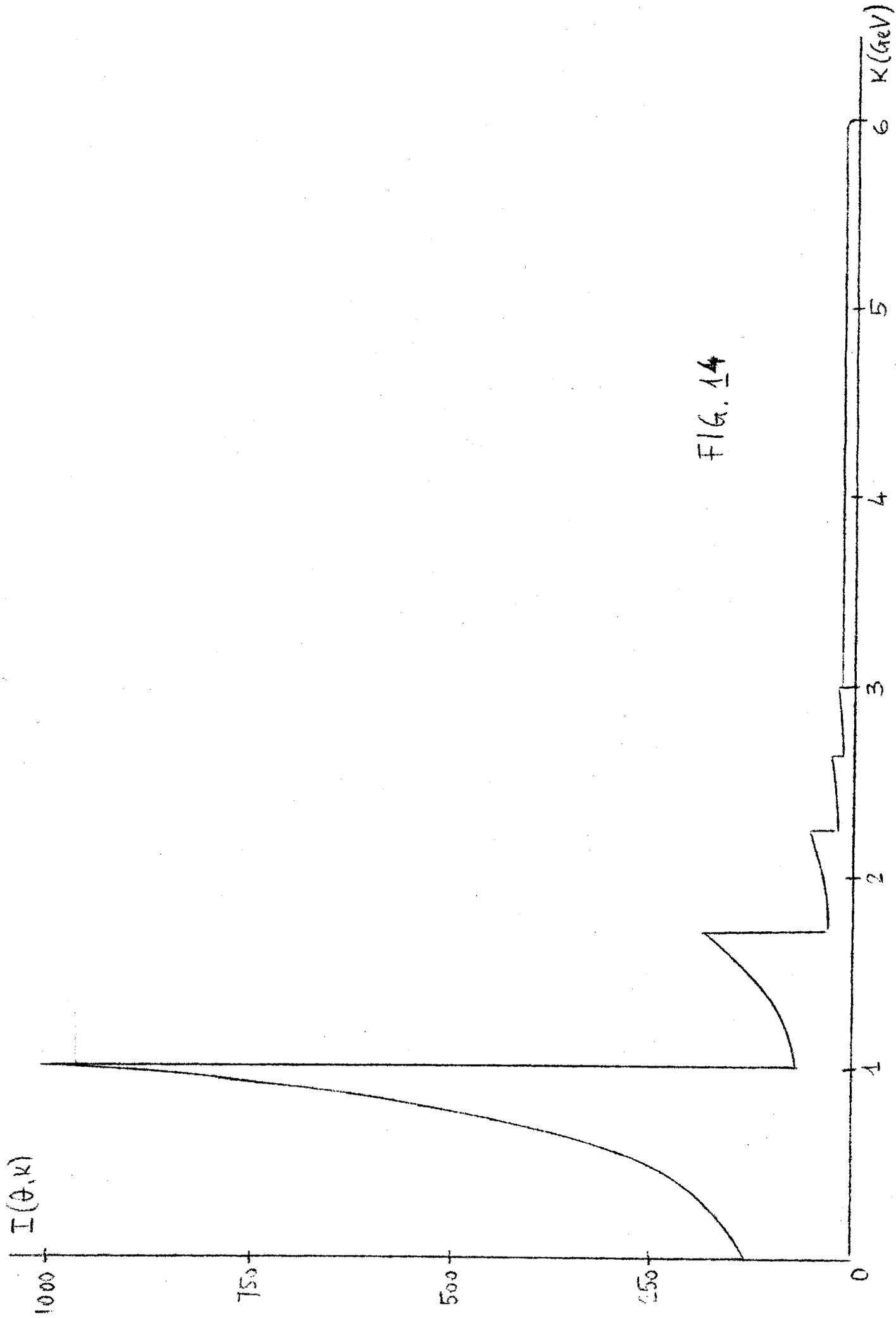


FIG. 14